

Terminale SE

MATHÉMATIQUES

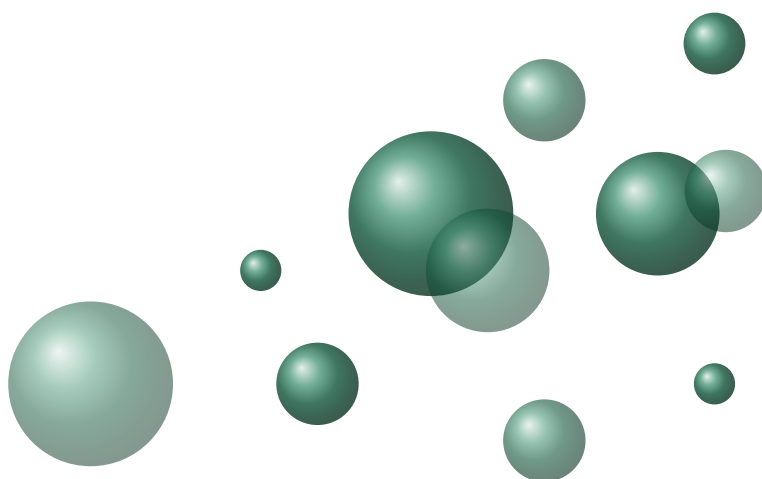
Cours et exercices d'entraînement

Dr K. KPOTUFE

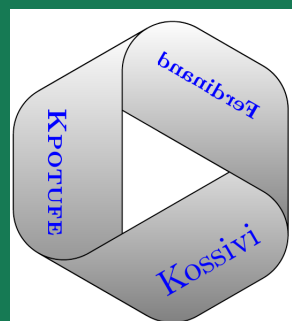
A.C.V.R.I

À cœur Vaillant, Rien d'Impossible

2022 – 2023



MATHÉMATIQUES
T^{le} SE



Enseignant de Mathématiques
kferdinandkossivi@gmail.com

A.C.V.R.I.

PRÉFACE

SEPT CONSEILS QUI VOUS PERMETTRONT DE TIRER DE CE LIVRE LE BIENFAIT MAXIMUM

- I. Pour tirer de ce livre le bienfait maximum, il faut une qualité essentielle, plus importante que tous les principes. Sans cette disposition fondamentale, les meilleures méthodes ne vous serviraient à rien. Mais, si vous la possédez, vous accomplirez des merveilles sans avoir besoin de lire ces suggestions. Quelle est donc cette condition magique ? Tout simplement ceci : *le désir et la volonté profonds et irrésistibles de vous perfectionner.*
Comment pouvez-vous développer ce désir ? En gardant constamment présente à l'esprit l'importance qu'est pour vous les méthodes recommandées ici.
- II. Commencez par lire rapidement chaque exercice et corrigé pour en prendre une vue d'ensemble. Vous serez peut-être tenté de courir au suivant. *Ne le faites pas.* Mais, si vous tenez réellement pour utiliser efficacement avec vos amis, alors revenez en arrière et relisez la partie soigneusement. C'est ainsi que vous épargnerez du temps et, en fin de compte, que vous obtiendrez des résultats.
- III. *Interrompez-vous fréquemment pour réfléchir à ce que vous venez de lire.*
Demandez-vous précisément quand et comment vous pouvez appliquer telle ou telle suggestion.
- IV. *Cochez ou surlignez les conseils que vous comptez utiliser.* Un livre jalonné de marques et d'annotations se révise beaucoup plus facilement et plus rapidement.
- V. *Si vous voulez tirer de ce livre un bienfait réel et durable, ne croyez pas qu'il vous suffira de le parcourir une seule fois.* Après l'avoir étudié attentivement, passez quelques heures chaque mois à le réviser. Gardez-le en permanence à portée de la main. Ouvrez-le fréquemment. Imprégnez votre esprit des possibilités de perfectionner qui s'offrent encore à vous.
- VI. *Il est plus simple de voir un défaut que de chercher à découvrir une qualité.*
Donc consultez souvent ces pages. Que ce livre soit votre manuel, votre guide dans vos

travaux de groupe.

VII. *Contrôler chaque semaine les progrès que vous faites. Vous demander quelles fautes vous avez commises, quels progrès vous avez accomplis, quelles leçons vous avez tirées.*

TABLE DES MATIÈRES

I	GÉOMÉTRIE-ALGÈBRE	9
1	Systèmes linéaires	10
1.1	Systèmes d'équations linéaires	10
1.1.1	Résolution d'un système d'équations linéaires à l'aide de la méthode du pivot de Gauss	11
1.2	Résolution de problèmes	11
1.2.1	Problèmes se ramenant à un système d'équations linéaires	11
1.2.2	Problèmes se ramenant à un système d'inéquations linéaires.	12
2	ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES	14
2.1	Nombres complexes	16
2.1.1	Vocabulaire d'un nombre complexe	16
2.1.2	Nombres complexes nuls	17
2.1.3	Égalité de deux nombres complexes	17
2.1.4	Conjugué d'un nombre complexe	17
2.1.5	Module d'un nombre complexe	18
2.1.6	Calcul dans $\mathbb{C}$	18
2.2	Représentation géométrique d'un nombre complexe	20
2.2.1	Plan complexe	20
2.2.2	Affixe et distance d'un vecteur	20
2.2.3	Argument d'un nombre complexe	21
2.2.4	Détermination de l'argument par calcul	21
2.3	Autres formes d'un nombre complexe	22
2.3.1	Forme trigonométrique	22
2.3.2	Forme exponentielle	23
2.4	Résolution d'équations complexes	25
2.4.1	Racine n -ième d'un nombre complexe	25
2.4.2	Cas particulier des racines carrées ($n = 2$)	26
2.4.3	Équations complexes du 2^{nd} degré	27
2.4.4	Équations complexes du $n^{ième}$ degré	27
2.5	Configuration du plan et nombres complexes	29
2.6	Exercices d'entraînement	30
2.6.1	Exercices niveau 1 : Faciles	30
2.6.2	Exercices de niveau 2 : Renforcement	30
2.6.3	Exercice de niveau 3 : Classiques	32

3	GÉOMÉTRIE ET NOMBRES COMPLEXES	34
3.1	Définitions	36
3.1.1	Similitude	36
3.1.2	Isométrie	36
3.1.3	Similitude directe	36
3.2	Similitude directe plane	36
3.2.1	Définition	36
3.2.2	Nature et éléments caractéristiques de $z' = az + b$	37
3.2.3	Obtention de l'écriture complexe d'une similitude directe plane	37
3.3	Récapitulation	38
3.4	Lieu géométriques et nombres complexes	39
3.4.1	Cercle de centre A et de rayon R	39
3.4.2	Droite	39
3.4.3	Démi-droite	39
3.5	Exercices d'entraînement	40
3.5.1	Exercices de niveau 1	40
3.5.2	Exercices de niveau 2	42
II	ANALYSE	44
4	LIMITES-CONTINUITÉS	45
4.1	Limites	46
4.1.1	Rappels (Notions de base : limites de référence)	46
4.1.2	Limites à gauche, limite à droite	46
4.1.3	Opérations sur les limites	47
4.1.4	Limite d'une fonction composée	48
4.1.5	Calcul de limites	48
4.1.6	Propriétés de comparaison	49
4.1.7	Théorème d'encadrement	49
4.1.8	Théorème des gendarmes	49
4.2	Continuité d'une fonction	49
4.2.1	Continuité en un point	49
4.2.2	Continuité sur un intervalle	50
4.2.3	Prolongement par continuité	50
4.2.4	Image d'un intervalle par une fonction continue	50
4.2.5	Calcul approché des zéros d'une fonction continue	51
4.2.6	Bijection	51
4.2.7	Fonction puissance d'exposant rationnel	52
4.3	Exercices d'entraînement	53
5	DÉRIVÉE-PRIMITIVES	55
5.1	Dérivation	56
5.1.1	Dérivabilité en x_0	56
5.1.2	Opération sur les dérivées	57
5.1.3	Dérivée successive	57
5.1.4	Dérivée de la réciproque d'une fonction bijective	58
5.1.5	Inégalité des accroissements finis	58
5.2	Primitives	58
5.2.1	Tableaux récapitulatifs	59
5.2.2	Autre forme de calcul de primitive	60

5.3	Exercices d'entraînement	61
6	ÉTUDES DE FONCTIONS	63
6.1	Plan d'étude d'une fonction	64
6.2	Parité-Périodicité d'une fonction	65
6.2.1	Parité	65
6.2.2	Périodicité d'une fonction	65
6.3	Axe de symétrie-Centre de symétrie	66
6.4	Points particuliers	66
6.4.1	Points d'intersection	66
6.4.2	Extréma	66
6.4.3	Points d'inflexion	66
6.5	Branches infinies	67
6.5.1	Asymptotes	67
6.5.2	Direction asymptotique	67
6.6	Exemple d'étude de fonctions	68
6.7	Exercices d'entraînement	69
7	FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN	72
7.1	Définitions et Propriétés	73
7.1.1	Ensemble de définition de $\ln(f(x))$ et $\ln(f(x))$	73
7.1.2	Variation de $\ln$ et conséquences	73
7.1.3	Propriétés algébriques de $\ln$	74
7.1.4	Équations comportant $\ln$	74
7.1.5	Inéquations comportant $\ln$	74
7.2	Dérivée-Primitive-limites	75
7.2.1	Variation et représentation graphique de $\ln$	75
7.2.2	Limites remarquables	76
7.2.3	Dérivée de $\ln(f(x))$ et $\ln(f(x))$	76
7.2.4	Primitives	76
7.3	Fonction logarithme de base a	77
7.4	Exercices d'entraînement	78
8	FONCTIONS EXPONENTIELLES ET PUISSANCES	82
8.1	Fonction exponentielle	83
8.1.1	Définition et conséquences	83
8.2	Équations et Inéquations	83
8.3	Limites - Dérivée - Primitives	84
8.3.1	Limites remarquables	84
8.3.2	Dérivée de $\exp(U(x))$	84
8.3.3	Primitive	84
8.4	Étude de la fonction $x \mapsto e^x$	85
8.5	Fonction exponentielle de base a	86
8.5.1	Proposition	86
8.5.2	Étude de la fonction $x \mapsto a^x, a > 0$	86
8.6	Fonction puissance	88
8.6.1	Étude de la fonction $g_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$	88
8.7	Exercices d'entraînement	89

9	INTÉGRATIONS	94
9.1	Définition et Propriétés	95
9.1.1	Conséquences et Propriétés	96
9.1.2	Inégalité de la moyenne	97
9.1.3	Valeur moyenne d'une fonction	98
9.1.4	Intégration par partie	98
9.2	Calcul d'aire , interprétation graphique d'une intégrale	99
9.2.1	Intégration d'une fonction paire, impaire et périodique	99
9.2.2	Aire d'une partie du plan limitée par une fonction	99
9.2.3	Aire d'une partie du plan limitée par deux fonctions	99
9.3	Calcul approché d'une intégrale	100
9.4	Exercices d'entraînement	101
10	ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	105
10.1	Généralité	106
10.1.1	Notation	106
10.2	Les types d'équations différentielles	106
10.2.1	Équation du type $y' = f(x)$	106
10.2.2	Équation du type $y'' = f(x)$	106
10.2.3	Équation du type $y' - ay = 0, a \in \mathbb{R}^*$	106
10.2.4	Équation différentielle du premier ordre avec second membre.	106
10.2.5	Équation différentielle du second degré du type $y'' - \omega^2 y = 0, \omega \in \mathbb{R}$	107
10.2.6	Équation différentielle du second degré du type $y'' + \omega^2 y = 0, \omega \in \mathbb{R}$	107
10.2.7	Équation différentielle du second degré du type $ay'' + by' + cy = 0, a, b, c \in \mathbb{R}$	107
10.3	Exercices d'entraînement	108
11	SUITES NUMÉRIQUES	110
11.1	Généralité	111
11.1.1	Détermination d'une suite	111
11.1.2	Propriétés des suites	111
11.1.3	Suite arithmétique & géométrique	112
11.1.4	Démonstration par récurrence	113
11.2	Limites d'une suite numérique	114
11.2.1	Limite infinie	114
11.2.2	Suite convergente	114
11.2.3	Suites de référence	114
III	ORGANISATION DES DONNÉES	116
12	DÉNOMBREMENT	117
12.1	Ensembles finis	118
12.1.1	Intersection de deux ensembles	118
12.1.2	Réunion de deux ensembles	119
12.1.3	Complémentaire d'un sous ensemble	119
12.1.4	Produit cartésien de deux ensembles	120
12.1.5	Parties d'un ensemble	120
12.2	Analyse combinatoire	121
12.2.1	Nombre d'applications d'un ensemble fini E dans un ensemble fini F	121
12.2.2	Arrangement	121
12.2.3	Permutation	122

12.2.4	Combinaison	122
12.2.5	Formule du binôme de newton	122

13 PROBABILITÉS 124

13.1	Vocabulaire des évènements	125
13.1.1	Expérience aléatoire ou Épreuve	125
13.1.2	Univers	125
13.1.3	Évènement	125
13.1.4	Éventualité	126
13.1.5	Évènement élémentaire	126
13.1.6	Évènement certain	126
13.1.7	Évènement incertain	126
13.1.8	Évènement impossible	126
13.1.9	Évènements incompatibles	127
13.2	Probabilité d'un évènement	127
13.3	Équiprobabilité	127
13.3.1	Quelques exemples de calcul de probabilités	128
13.4	Probabilité conditionnelle	129
13.4.1	Définition et propriétés	129
13.4.2	Probabilités totales	130
13.4.3	Formule de probabilités totales	131
13.4.4	Utilisation de d'arbres de probabilité ou arbres pondérés pour le calcul de probabilités conditionnelles	131
13.5	Variable aléatoire	132
13.5.1	Loi de probabilité	132
13.5.2	Fonction de répartition	133
13.5.3	Espérance mathématique	133
13.5.4	Variance	134
13.5.5	Écart-type	134
13.6	Épreuve de Bernoulli – loi binomiale	134
13.6.1	Épreuve de Bernoulli	134
13.6.2	Loi binomiale	135
13.7	Exercices d'entraînement	136

14 STATISTIQUES 142

14.1	Introduction	142
14.2	Rappels	143
14.3	Séries statistiques doubles	143
14.3.1	Nuage de points	143
14.3.2	Point moyen d'un nuage de points	144
14.4	Ajustement affine	144
14.4.1	Ajustement affine par la méthode des moindres carrés	144
14.5	Corrélation linéaire	145
14.5.1	Coefficient de corrélation linéaire	145
14.6	Exercices d'entraînement	145

Première partie

GÉOMÉTRIE-ALGÈBRE

CHAPITRE 1

SYSTÈMES LINÉAIRES

Sommaire

1.1	Systèmes d'équations linéaires	10
1.1.1	Résolution d'un système d'équations linéaires à l'aide de la méthode du pivot de Gauss	11
1.2	Résolution de problèmes	11
1.2.1	Problèmes se ramenant à un système d'équations linéaires	11
1.2.2	Problèmes se ramenant à un système d'inéquations linéaires.	12

Objectifs pédagogiques

- ☞ Reconnaître un système d'équations linéaires.
- ☞ Résoudre un système d'équations linéaires à l'aide de la méthode du pivot de **GAUSS**.
- ☞ Mettre en équations un problème concret se ramenant à la résolution d'un système d'équations linéaires ;

1.1 Systèmes d'équations linéaires

DÉFINITION 1.1.1 ✿

Un système de m équations linéaires à n inconnues est un système pouvant être écrit sous la forme suivante :

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

où $x_1, \dots, x_m$ sont les inconnues et les nombres a_{ij} sont les coefficients du système.

Exemple 1.1.1 ...

$$(S_1) : \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ -x + 5y = 0 \end{cases} ; (S_2) : \begin{cases} x + 10y - 3z = 5 \\ 2x - y + 2z = 2 \\ -x + y + z = -3 \end{cases} \text{ et}$$
$$(S_3) : \begin{cases} 2x + 3y + 4z + 5t = 0 \\ x + y - z - t = 1 \\ -x - y + 2z - 3t = 0 \\ 2y + 3z + t = 3 \end{cases} .$$

Résoudre un système de m équations linéaires revient à trouver les valeurs des inconnues et qui satisfassent les m équations simultanément.

1.1.1 Résolution d'un système d'équations linéaires à l'aide de la méthode du pivot de Gauss

La méthode de Gauss consiste à transformer un système linéaire en un système triangulaire équivalent en exécutant des opérations élémentaires sur des lignes.

Propriété 1.1.1 (Méthode de Gauss) ✱

Pour résoudre un système linéaire par la méthode de Gauss, on procède comme suit :

- ♣ On vérifie que, dans la ligne L_1 , le coefficient de la première inconnue est non nul, sinon on échange la ligne L_1 avec une ligne dont le coefficient de la première inconnue est non nul.
- ♣ A l'aide de l'opération élémentaire $(L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j)$. On annule tous les coefficients de la première inconnue dans les autres lignes ;
- ♣ On recommence de procéder pour la deuxième inconnue, la troisième inconnue, jusqu'à l'obtention d'un système triangulaire.

Remarque 1.1.I

La méthode de Gauss est déjà traitée en classe de 1^{ère}-D pour trois équations dans $\mathbb{R}^3$. Donc il ne devait pas y avoir de difficultés.

Exemple 1.1.2 ...

Résoudre le système suivant d'inconnues (x, y, z, t) , :

$$(S) : \begin{cases} y + z - 2t = 1 \\ x - y + z + t = 1 \\ 3x + 3y - z - t = 3 \\ 2x - 3y + 2z + 3t = 4 \end{cases} .$$

Solution 1.1.1 ✱

Voir CIAM : page 261.

Exercice 1.1.1 ...

Exercice 2, CIAM : page 268.

1.2 Résolution de problèmes

1.2.1 Problèmes se ramenant à un système d'équations linéaires

ACTIVITÉ 1.2.1

Un potier fabrique 3 types différents A ; B et C. de canaris.

- Pour fabriquer un canari du type $\underline{A}$, le potier a besoin de : **40kg** d'argile, **60** litres d'eau et **15Kg** de bois de chauffage.
- Pour fabriquer un canari du type $\underline{B}$, le potier a besoin de : **18kg** d'argile, **20** litres d'eau et **7Kg** de bois de chauffage.
- Pour fabriquer un canari du type $\underline{C}$, le potier a besoin de : **70kg** d'argile, **110** litres d'eau et **35Kg** de bois de chauffage.

En une semaine, le potier utilise pour la fabrication de ces canaris : **2656Kg** d'argile, **5040** litres d'eau et **1494Kg** de bois de chauffage.

Déterminer le nombre de canaris de chaque type que ce potier fabrique ainsi en une semaine.

Exercice 1.2.1 ...

Exercices 6 et 7 CIAM : page 268.

Ces types de systèmes sont résolus en classe de 1^{ère}-D. Suffirait de transformer z en inconnue.

1.2.2 Problèmes se ramenant à un système d'inéquations linéaires.

Remarque 1.2.I

Ceci n'est pas au programme HPM T^{le}-D. Mais ces types de systèmes sont vu en 1^{ère}-D. Donc on peut les traiter.

ACTIVITÉ 1.2.2

1. On considère un plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A tout couple (x, y) de réels, on associe le point M de P de coordonnées x et y , en convenant que **2** cm représentent **5** cm sur chaque axe.

Représenter dans P l'ensemble G des points $M(x, y)$ satisfaisant aux inéquations

$$(\Sigma) : \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \geq 90 \\ x + 3y \geq 60 \\ 4x + 3y \geq 120 \end{cases}$$

On hachurera la partie du plan formée des points pour lesquels les contraintes ne sont pas vérifiées.

2. Le gérant d'un hôtel souhaite renouveler le linge de toilette de son établissement. Il a besoin de **90** draps, **240** serviettes gants de toilette.

Une deuxième entreprise vend pour **400 F** un lot B de **3** draps de bain, **12** serviettes et **6** gants de toilette.

- (a) Pour répondre à ses besoins, le gérant achète x lots de A et y lots de B .

Exprimer en fonction x et y la dépense en francs occasionnée par l'achat de x lots de A et y lots de B .

- (b) Justifier que (Σ) est le système de contraintes lié au renouvellement du linge.

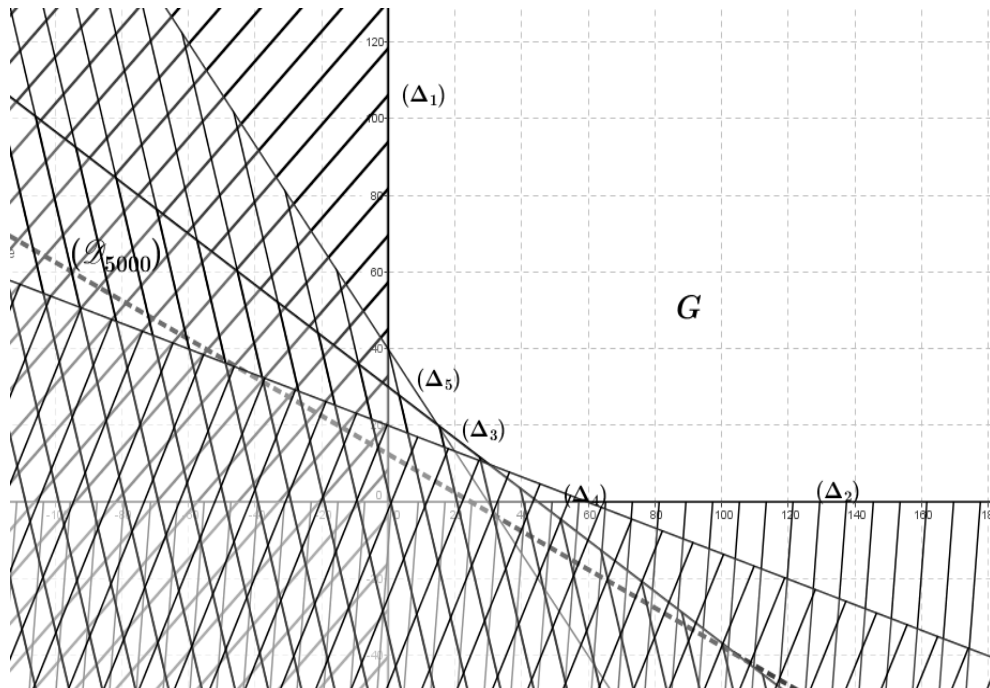
- (c) Déterminer graphiquement, en précisant la démarche choisie, le nombre de lots A et B à acheter pour avoir une dépense ? Quelle est cette dépense minimale ?

Résolution 1.2.1 ✱

$$(\Sigma) : \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \geq 90 \\ x + 3y \geq 60 \\ 4x + 3y \geq 120 \end{cases}$$

1. Représentons dans $(\mathcal{P})$, l'ensemble G des points satisfaisant aux inéquations (Σ) :

Soient $(\Delta_1) : x = 0$; $(\Delta_2) : y = 0$; $(\Delta_3) : 2x + 3y = 90$
 $(\Delta_4) : x + 3y = 60$ et $(\Delta_5) : 4x + 3y = 120$



2. (a) Exprimons en fonction de x et y les dépenses en francs occasionnées par l'achat de x lots de A et y lots de B :

Soit m la dépense.

On a : $m = 200x + 400y$.

- (b) Justifions que (Σ) est le système de contraintes lié au renouvellement du linge :

Pour renouveler le linge, x et y doivent satisfaire au système

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \geq 90 \\ 4x + 12y \geq 240 \text{ ①} \\ 8x + 6y \geq 240 \text{ ②} \end{cases} \quad . \text{ Ce qui est équivalent à } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \geq 90 \\ x + 3y \geq 60 \text{ en divisant ① par 4} \\ 4x + 3y \geq 120 \text{ en divisant ② par 2} \end{cases}$$

qui est le système (Σ) .

D'où , (Σ) est le système lié au renouvellement du linge.

- (c) Vérifions si les achats sont possibles avec 5000 F :

Posons $m = 5\,000$.

On a : $200x + 400y = 5000 \iff x + 2y = 25$.

Désignons par $(\mathcal{D}_{5\,000})$, la droite d'équation : $x + 2y = 25$. Graphiquement $(\mathcal{D}_{5\,000}) \cap G = \emptyset$.

Par conséquent , avec 5 000 F, il est impossible de procéder aux achats nécessaires.

- (d) Déterminons graphiquement, en précisant la démarche choisie, le nombre de lots A et B à acheter pour avoir une dépense minimale :

Soit $(\mathcal{D}_m)$: $200x + 400y = 2m$.

Cette dépense minimale est obtenue dès que $(\mathcal{D}_m) \cap G = \{M\}$ avec l'ordonnée y de M la plus petite possible. En faisant varier m , on voit que $M(30, 10)$. Ainsi la dépense minimale est :

$M_{\min} = 30 \times 200 + 400 \times 10 = 10\,000F$. D'où , $M_{\min} = 10\,000F$.

CHAPITRE 2

ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

Sommaire

2.1	Nombres complexes	16
2.1.1	Vocabulaire d'un nombre complexe	16
2.1.2	Nombres complexes nuls	17
2.1.3	Égalité de deux nombres complexes	17
2.1.4	Conjugué d'un nombre complexe	17
2.1.5	Module d'un nombre complexe	18
2.1.6	Calcul dans $\mathbb{C}$	18
2.2	Représentation géométrique d'un nombre complexe	20
2.2.1	Plan complexe	20
2.2.2	Affixe et distance d'un vecteur	20
2.2.3	Argument d'un nombre complexe	21
2.2.4	Détermination de l'argument par calcul	21
2.3	Autres formes d'un nombre complexe	22
2.3.1	Forme trigonométrique	22
2.3.2	Forme exponentielle	23
2.4	Résolution d'équations complexes	25
2.4.1	Racine n -ième d'un nombre complexe	25
2.4.2	Cas particulier des racines carrées ($n = 2$)	26
2.4.3	Équations complexes du 2^{nd} degré	27
2.4.4	Équations complexes du $n^{ième}$ degré	27
2.5	Configuration du plan et nombres complexes	29
2.6	Exercices d'entraînement	30
2.6.1	Exercices niveau 1 : Faciles	30
2.6.2	Exercices de niveau 2 : Renforcement	30
2.6.3	Exercice de niveau 3 : Classiques	32

Objectifs pédagogiques

L'élève doit être capable de :

- ☞ Calculer avec des nombres complexes écrits sous la forme $a + ib$.
- ☞ Utiliser le triangle de Pascal pour développer $(z + z')^n$ où z et z' sont deux nombres complexes et n un entier naturel non nul donné.
- ☞ Placer l'image du nombre complexe $a + ib$; calculer son module et son argument. On pourra utiliser la notation $re^{i\theta}$ pour alléger certains calculs.
- ☞ Ecrire un nombre complexe sous la forme $a + ib$ connaissant son module et son argument.
- ☞ Calculer dans $\mathbb{C}$ en utilisant la plus économique des trois formes :
 - $a + ib$ (en entraînera les élèves à calculer comme dans $\mathbb{R}$ en utilisant $i^2 = -1$).
 - z ou $\bar{z}$.
 - $\cos(\theta) + i \sin(\theta)$.
- ☞ Passer de la forme algébrique d'un nombre complexe non nul à la forme trigonométrique.
- ☞ Caractériser un nombre réel (resp. un nombre imaginaire pur) en utilisant la *partie réelles et imaginaires*, le *conjugué* ou un *argument*.
- ☞ Traduire une propriété géométrique et interpréter géométriquement par une relation dans $\mathbb{C}$.
- ☞ Utiliser la formule de MOIVRE et le triangle de PASCAL pour trouver certaines formules trigonométriques et linéaire des puissances de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
- ☞ Utiliser les nombres complexes pour résoudre une équation du type $a \cos(x) + b \sin(x)$.
- ☞ Trouver les racines carrées d'un nombre complexe écrit sous la forme algébrique.
- ☞ Résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation du second degré à coefficients complexes ou se ramenant au second degré par changement d'inconnue du type : $z^n = X$.
- ☞ Trouver le module et un argument des racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe et les représenter sur un cercle.

Introduction

ACTIVITÉ 2.0.1

$$\text{Résoudre dans } \mathbb{R} \text{ l'équation } (E) : x^2 + 1 = 0 \quad (2.1)$$

Résolution 2.0.1 ✱

$$\begin{aligned} \text{On a : } \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 0^2 - 4(1)(1) \\ &= -4 \implies \Delta < 0. \text{ d'où } \underline{S_{\mathbb{R}} = \emptyset} \end{aligned}$$

Dans $\mathbb{R}$, l'équation 2.1 n'a pas de solution ; le problème mathématique qui se pose est de construire un nouvel ensemble contenant $\mathbb{R}$ et dans lequel les propriétés de l'addition et de la multiplication sont vérifiées. On suppose l'existence d'un nombre *imaginaire* noté i vérifiant :

$i^2 = -1$

L'ensemble cherché est appelé **ensemble des nombres complexes** noté $\mathbb{C}$ et on a :
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

NB : l'inconnue pour les nombres complexes est souvent notée z comme x l'est pour les nombre réels.

Ainsi dans cet ensemble l'équation 2.1 :

$$\begin{aligned}
 (E) : x^2 + 1 = 0 & \text{ devient } z^2 - (-1) = 0 \\
 & \iff z^2 - (-1) = 0 \\
 & \iff z^2 - (i)^2 = 0 \text{ d'après la définition précédente} \\
 & \iff (z - i)(z + i) = 0 \\
 & \iff z = i \text{ ou } z = -i. \text{ D'où } \underline{S_{\mathbb{C}}} = \{-i, i\}
 \end{aligned}$$

2.1 Nombres complexes

DÉFINITION 2.1.1 ✿

On appelle *nombre complexe*, tout nombre s'écrivant sous la forme $a+ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Exemple 2.1.1 ... 📖

$5 + 2i$, $1 + 2i$; 2 et i sont des nombres complexes.

Lorsqu'on qu'un nombre complexe z s'écrit sous la forme :

$$z = a + ib; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$$

on dit que z est sous sa **forme algébrique**.

N.B : Dans l'évolution de cette section, les différentes études porteront sur cette forme algébrique

2.1.1 Vocabulaire d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$. Ainsi :

- a est appelé **Partie réelle** de z notée $\mathcal{R}_e(z)$. et
- b est appelé **Partie imaginaire** de z notée $\mathcal{I}_m(z)$.

Remarque 2.1.I

Soit $z = a + ib$.

- ☞ z est **réel** ($z \in \mathbb{R}$) $\iff \mathcal{I}_m(z) = 0$.
- ☞ z est **imaginaire pur** ($z \in i\mathbb{R}$) $\iff \mathcal{R}_e(z) = 0$.

Exemple 2.1.2 ... 📖

1. $z = 3 - 2i$: $\mathcal{R}_e(z) = 3$ et $\mathcal{I}_m(z) = -2$.
2. Déterminer x et y pour que $z = 3 + (x - 1)i$ soit un réel, puis imaginaire pur
 $z \in \mathbb{R} \iff \mathcal{I}_m(z) = 0$ c'est-à-dire $x - 1 = 0$ D'où $\underline{x = 1}$.

2.1.2 Nombres complexes nuls

Soit $z = a + ib$, on a :

$$z = 0 \iff a = 0 \text{ et } b = 0.$$

Exemple 2.1.3 ...

Déterminons x et y pour que $z = (x + 1) + i(2y - 3)$ soit nul.

D'après ce qui précède, On a :

$$\begin{aligned} z = 0 &\iff x + 1 = 0 \text{ et } 2y - 3 = 0 \\ &\iff x = -1 \text{ et } y = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

2.1.3 Égalité de deux nombres complexes

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, on a :

$$z = z' \iff a = a' \text{ et } b = b'$$

Exemple 2.1.4 ...

Déterminons x et y pour que $z = (x + 2) + 3iy$ et $z' = 3i$ soient égaux.

D'après ce qui précède, On a :

$$\begin{aligned} z = z' &\iff x + 2 = 0 \text{ et } 3y = 3 \\ &\iff x = -2 \text{ et } y = 1. \end{aligned}$$

2.1.4 Conjugué d'un nombre complexe

DÉFINITION 2.1.2

Soit $z = a + ib$. Le conjugué du nombre complexe z est noté $\bar{z}$ et vaut : $a - ib$.

$$\bar{z} = a - ib.$$

Exemple 2.1.5 ...

Les conjugués des nombres complexes suivants : $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 3 - 5i$ et $z_3 = 0$. sont respectivement : $\bar{z}_1 = 3 - 2i$, $\bar{z}_2 = 3 + 5i$ et $\bar{z}_3 = 0$

Propriété 2.1.1

Soient z et z' deux nombres complexes tels que $z = a + ib$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \\ \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}' \\ z \times \bar{z} = (\mathcal{R}_e(z))^2 + (\mathcal{I}_m(z))^2 = a^2 + b^2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}, z \neq 0 \\ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}, z' \neq 0 \\ \bar{z}^n = (\bar{z})^n, n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Remarque 2.1.II

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$), alors :

$$\begin{aligned} \Rightarrow z + \bar{z} &= 2\mathcal{R}_e(z) = 2x \Rightarrow x = \frac{z + \bar{z}}{2}. \\ \Rightarrow z - \bar{z} &= 2\mathcal{I}_m(z) = 2iy \Rightarrow y = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \\ \Rightarrow z \in \mathbb{R} &\iff z = \bar{z}. \\ \Rightarrow z \in i\mathbb{R} &\iff z = -\bar{z}. \end{aligned}$$

2.1.5 Module d'un nombre complexe

DÉFINITION 2.1.3 ✿

On appelle module d'un nombre complexe z , le nombre noté $|z|$ et vaut $|z| = \sqrt{z \times \bar{z}}$. on le calcule en posant $z = a + ib \rightarrow z \times \bar{z} = a^2 + b^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Attention : Le module d'un nombre complexe est *toujours positif*.

Exemple 2.1.6 ...

Les modules des nombres complexes suivants : $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 3 - 4i$ et $z_3 = 2i$ sont respectivement : $|z_1| = \sqrt{13}$, $|z_2| = 5$ et $|z_3| = 2$.

Propriété 2.1.2 ✿

Soient z et z' deux nombres complexes. On :

$$\left\{ \begin{array}{l} |z| = 0 \iff z = 0 \\ |z| = |\bar{z}| \\ |z * z'| = |z| * |z'| \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} |z^n| = |z|^n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}, \quad z' \neq 0 \\ |z + z'| \leq |z| + |z'| \text{ (inégalité triangulaire)} \end{array} \right.$$

Remarque 2.1.III

Soit $z = a + ib$

- $\Rightarrow$ Si $z \in \mathbb{R}$ alors $|z| = |a|$.
- $\Rightarrow$ Si $z \in i\mathbb{R}$ alors $|z| = |b|$.

2.1.6 Calcul dans $\mathbb{C}$

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$

Addition

On a :

$$z + z' = (a + a') + i(b + b')$$

Démonstration: évidente

Multiplication

On a :

$$z * z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

Démonstration: Confère cahier de notes

Exemple 2.1.7 ... 

Écrire plus simplement l'expression $A = (2 - 3i)^2 - (2 + 3i)(1 + i)$.

Résolution 2.1.1 ✱

$$\begin{aligned} A &= (2 - 3i)^2 - (2 + 3i)(1 + i) \\ &= ((2)^2 - 2(2)(3i) + (3i)^2) - (2 + 2i + 3i + 3i^2) \text{ or } i^2 = -1 \text{ donc} \\ &= (4 - 12i - 9) - (2 + 5i - 3) \\ &= (-5 - 12i) - (-1 + 5i) \\ &= (-5 + 1) - 12i - 5i \\ &= -4 - 17i \implies \underline{A = -4 - 17i} \end{aligned}$$

$$\mathcal{NB} : \text{opp}(z) = -z$$

Quotient

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } z \neq 0, \text{ alors } \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} \\ \text{Si } z' \neq 0, \text{ alors } \frac{z}{z'} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + i \frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2} \end{array} \right.$$

Démonstration: Confère cahier de notes

Exemple 2.1.8 ... 

Écrire le nombre complexe suivant sans i au dénominateur : $B = \frac{2 - 3i}{1 + 3i}$.

Résolution 2.1.2 ✱

$$\begin{aligned} B &= \frac{2 - 3i}{1 + 3i} \\ &= \frac{(2 - 3i)(1 - 3i)}{(1 + 3i)(1 - 3i)} \\ &= \frac{-7 - 9i}{10} \implies \underline{B = \frac{-7}{10} - \frac{9}{10}i}. \end{aligned}$$

Exercice 2.1.1 ... 

1. Calculer le module des nombres complexes suivants :

$$z_1 = (2 - i)(1 + i) \quad z_2 = \frac{1 + i}{2 - i} \quad z_3 = \left(\frac{i\sqrt{3}}{1 + i} \right)^4.$$

2. Soit $Z = \frac{z-i}{z+i}$ Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur z pour que $Z \in \mathbb{R}$.
3. Soit $Z = \frac{z-2}{2z-1}$. On pose $z = x + iy$.
 - a) Déterminer $\mathcal{R}_e(z)$ et $\mathcal{I}_m(z)$.
 - b) Déterminer l'ensemble des points $M(x, y) \in \mathcal{P}$ pour que $Z \in \mathbb{R}$.

Solution 2.1.1 *

1. $|z_1| = \sqrt{10}, |z_2| = \frac{\sqrt{10}}{5}, |z_3| = \frac{9}{4}$
2. Il suffit de résoudre $\bar{Z} = Z$ i.e $\overline{\left(\frac{z-i}{z+i}\right)} = \frac{z-i}{z+i}$. Ce qui conduira à la condition Z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = z, z \neq -i \iff z = bi, b \neq -1$.
3. (a) $\mathcal{R}_e(Z) = \frac{2x(x-2) + y(2y-1)}{4x^2 + (2y-1)^2}$ et $\mathcal{I}_m(Z) = \frac{2xy - (2y-1)(x-2)}{4x^2 + (2y-1)^2}$.
 (b) L'ensemble E cherché est tel que : $E = \{M(x, y) / Z \in \mathbb{R} \iff \mathcal{I}_m(Z) = 0\}$.
 E est la droite $(\mathcal{D}) : y = \frac{1}{4}(2-x)$ privé du points $A(0, \frac{1}{2})$ ou $E = (\mathcal{D}) - A$

2.2 Représentation géométrique d'un nombre complexe

2.2.1 Plan complexe

Soit $\mathcal{P}$ le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On désigne par :
 $\mathcal{V}$, l'ensemble des vecteurs du plan rapporté à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

$\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres complexes. Soit $z = x + iy$ et M sa représentation :

- ☞ M est appelé **point image** de z noté $M(z)$.
- ☞ $\overrightarrow{OM}$ est appelé **vecteur image** de z noté $\overrightarrow{OM}(z)$.
- ☞ z est appelé **affixe** du point M noté z_M .

On représente $z = x + iy$ par le point $M(x, y)$.

♣ L'axe $(O, \vec{e}_1)$ est appelé **axe des réels**.

♣ L'axe $(O, \vec{e}_2)$ est appelé **axe des imaginaires purs**.

Exemple 2.2.1 ...

Représenter le nombre complexe suivant : $z = 4 + 3i$.

Exemple 2.2.2 ...

1. Les affixes des points $A(2, 3)$; $B(3, 0)$ et $C(0, -5)$ sont respectivement $z_A = 2 + 3i, z_B = 3$ et $z_C = -5i$.
2. Les points images de E, F et G d'affixes respectives $z_E = -4i, z_F = 2 - 3i, z_G = \sqrt{2}$ sont respectivement $E(0, -4), F(2, -3)$ et $G(\sqrt{2}, 0)$.

2.2.2 Affixe et distance d'un vecteur

Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On a :

$$\begin{cases} z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A \\ |\overrightarrow{AB}| = |z_B - z_A| \end{cases} \text{ Ainsi } OA = ||\overrightarrow{OA}|| = |z_A|$$

Exemple 2.2.3 ...

Soient $z_A = 2 + i$ et $z_B = 2 - i$. Calculer $z_{\overrightarrow{AB}}$ et AB

Solution 2.2.1 ✱

$z_{\overrightarrow{AB}} = -2i$ et $AB = 2$

2.2.3 Argument d'un nombre complexe

DÉFINITION 2.2.1 ✱

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ l'affixe de $\overrightarrow{OM}$ et $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère orthonormé. On appelle :

♣ **Argument** de z noté $\text{Arg}(z)$, la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{Oe_1}, \overrightarrow{OM})$ c'est-à-dire

$$\text{Arg}(z) = \widehat{(\overrightarrow{Oe_1}, \overrightarrow{OM})}.$$

♣ **argument** de z noté $\arg(z)$ tel que : $\arg(z) = \text{Arg}(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Exemple 2.2.4 ...

Après avoir représenté le nombre complexe $z = 3 - 2i$, placer l'Argument de ce dernier

Remarque 2.2.I

Soit $k \in \mathbb{Z}$

- ♣ Si $z \in i\mathbb{R}^*$ alors $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
 - Si $z \in i\mathbb{R}_+^*$ alors $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
 - Si $z \in i\mathbb{R}_-^*$ alors $\arg(z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
- ♣ Si $z \in \mathbb{R}^*$ alors $\arg(z) = k\pi$.
 - Si $z \in \mathbb{R}_+^*$ alors $\arg(z) = 2k\pi$.
 - Si $z \in i\mathbb{R}_-^*$ alors $\arg(z) = \pi + 2k\pi$.

2.2.4 Détermination de l'argument par calcul

Soit $z = a + ib$ avec θ et M respectivement son argument et son point image. On a d'après

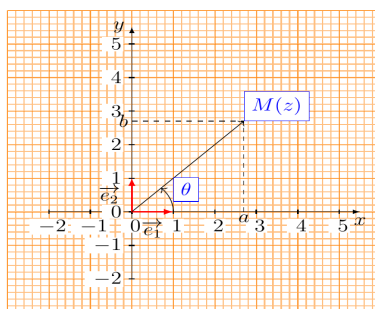


FIGURE 2.1 – Détermination d'Argument par calcul

la Figure 2.1 ci-dessus :
$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) = \frac{b}{|z|} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \cos^{-1}\left(\frac{a}{|z|}\right) \\ \theta = \sin^{-1}\left(\frac{b}{|z|}\right) \end{cases}$$

Exemple 2.2.5 ...

Déterminer l'Argument de $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$

Résolution 2.2.1 *
Soit $\theta = \text{Arg}(z_1)$. On a :
$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{|z_1|} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{|z_1|} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} . \text{ D'où } \boxed{\theta = \text{Arg}(z_1) = \frac{\pi}{3}}$$

Propriété 2.2.1 *

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

a) Fondamentales

$$\boxed{\text{Arg}(z * z') = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z') \mid \text{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) = \text{Arg}(z) - \text{Arg}(z')}$$

$$\boxed{\text{Arg}(\bar{z}) = -\text{Arg}(z) \mid \text{Arg}(-z) = \pi + \text{Arg}(z)}$$

b) Conséquences

$$\boxed{\text{Arg}(z^n) = n * \text{Arg}(z), n \in \mathbb{Z} \mid \text{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\text{Arg}(z) \mid \text{Arg}(-\bar{z}) = \pi - \text{Arg}(z)}$$

Remarque 2.2.II

Soient A, B et C trois points distincts d'affixes respectives z_A, z_B et z_C . On a :

$$\boxed{\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

2.3 Autres formes d'un nombre complexe

Nous avons vu dans la section précédente, les nombres complexes sous leurs principaux formes algébriques et les différentes propriétés qui vont avec. Dans cette section, nous allons aborder les autres formes secondaires de ces nombres complexes à savoir : les formes trigonométrique et exponentielle.

2.3.1 Forme trigonométrique

Obtention de la forme trigonométrique :

Soit $z = a + ib$ avec $(a, b) \notin (0, 0)$ tel que $\text{Arg}(z) = \theta$.

On a : $z = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$. Or $\sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ et

$$\begin{cases} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{|z|} = \cos(\theta) \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{|z|} = \sin(\theta) \end{cases} \quad \text{D'où } z = |z| (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

Par conséquent, lorsqu'un nombre complexe z s'écrit sous la forme :

$$z = |z| (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

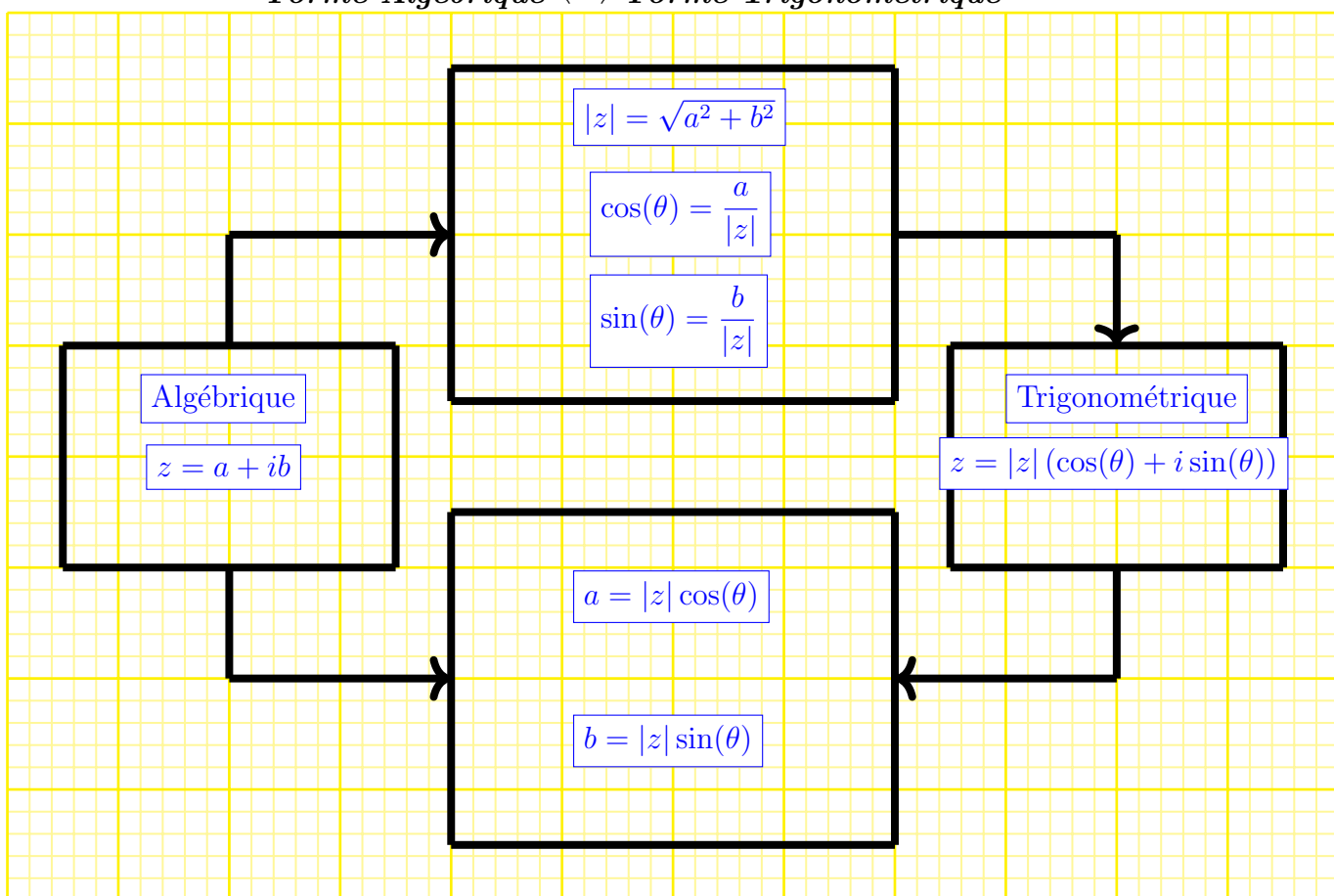
on dit que z est sous sa **forme trigonométrique**.

Exemple 2.3.1 ...

Déterminer la forme trigonométrique de $z_1 = 1$, $z_2 = i$ et $z_3 = 1 - i$

CE QU'IL FAUT RETENIR

Forme Algébrique $\iff$ Forme Trigonométrique



2.3.2 Forme exponentielle

Par notation, on pose :

$$\cos(\theta) + i \sin(\theta) = e^{i\theta} \quad \text{avec } \theta = \text{Arg}(z)$$

L'écriture $z = |z|e^{i\theta}$ est appelée **forme exponentielle** de z . En posant $|z| = r$, on a :

$$z = re^{i\theta}$$

Propriété 2.3.1 ❀

Soient z et z' deux nombres complexes tels que : $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$. On a :

$$z * z' = rr'e^{i(\theta+\theta')} \quad \left| \quad \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}, z' \neq 0 \quad \left| \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}, z \neq 0 \quad \right| \quad z^n = r^n e^{in\theta}$$

♣ Formule de MOIVRE

Pour $n \in \mathbb{Z}$, On a :

$$\left(\cos(\theta) + i \sin(\theta) \right)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Cette écriture est la formule de Moivre

♣ Formules de EULER

a) Fondamentales

$$\cos(n\theta) = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}, n \in \mathbb{Z} \quad \left| \quad \sin(n\theta) = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}, n \in \mathbb{Z} \right|$$

b) Conséquences ($n = 1$)

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \left| \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right|$$

Ces écritures sont connues sous le nom de formules de Euler.

Démonstration: Confère cahier de notes

♣ Binôme de NEWTON

Soient a et b deux nombres complexes non nuls et $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k \text{ avec } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

♣ Triangle de PASCAL

$n(\text{degré})$	<i>Coefficients</i>					
0	$1(a+b)^0$					
1	$1(a)$	$1(b)$				
2	$1(a^2)$	$2(ab)$	$1(b^2)$			
3	$1(a^3)$	$3(a^2b)$	$3(ab^2)$	$1(b^3)$		
4	$1(a^4)$	$4(a^3b)$	$6(a^2b^2)$	$4(ab^3)$	$1(b^4)$	
5	$1(a^5)$	$5(a^4b)$	$10(a^3b^2)$	$10(a^2b^3)$	$5(ab^4)$	$1(b^5)$

♣ Linéarisation

$$\begin{aligned}
\cos^4 \theta &= (\cos \theta)^4 \\
&= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} \right)^4 \\
&= \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^4}{2^4} \\
&= \frac{1}{2^4} \left((e^{i\theta})^4 (e^{-i\theta})^0 + 4 (e^{i\theta})^3 (e^{-i\theta})^1 + 6 (e^{i\theta})^2 (e^{-i\theta})^2 + 4 (e^{i\theta})^1 (e^{-i\theta})^3 + (e^{-i\theta})^4 \right) \\
&= \frac{1}{2^4} (e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}) \\
&= \frac{1}{2^4} (e^{4i\theta} + e^{-4i\theta} + 4(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) + 6) \quad \text{Or } \begin{cases} 2\cos(4\theta) = e^{4i\theta} - e^{-4i\theta} \\ 2\cos(2\theta) = e^{2i\theta} - e^{-2i\theta} \end{cases} \text{ et d'où} \\
&= \frac{1}{2^4} (2\cos(4\theta) + 8\cos(2\theta) + 6) \\
&= \frac{1}{8}\cos(4\theta) + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{3}{8} \implies \underline{\cos^4 \theta = \frac{1}{8}\cos(4\theta) + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{3}{8}}
\end{aligned}$$

2.4 Résolution d'équations complexes

2.4.1 Racine n-ième d'un nombre complexe

DÉFINITION 2.4.1 ❀

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z \in \mathbb{C}^*$. On appelle racine n-ième de Z , tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$ /

$z^n = Z$. Les racines n-ièmes de Z sont les solutions de l'équation (E) : $z^n = Z$.

Résolvons l'équation

$$(E) : z^n = Z \tag{2.2}$$

Pour cela posons $z = \rho e^{i\alpha}$ et $Z = r e^{i\theta}$ ($\rho > 0, r > 0$).

Ainsi l'équation $z^n = Z$ devient $(\rho e^{i\alpha})^n = r e^{i\theta} \iff \rho^n e^{in\alpha} = r e^{i\theta}$

$$\implies \begin{cases} \rho^n = r \\ n\alpha = \theta + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases} \quad \text{car } r > 0. \text{ D'où}$$

$$S_{(E)} = \{z_k\} \text{ avec } z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

Exemple 2.4.1 ...

Déterminer les racines cubiques de $Z = -i$

Remarque 2.4.I

- ☞ Si $n = 2$, on a deux racines carrées qui sont opposées.
- ☞ Si $n > 2$, les racines sont les affixes des sommets d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.
- ☞ On peut obtenir toutes les racines n -ième d'un nombre complexe Z en multipliant l'une d'entre elle par les racines n -ième de 1.

Exemple 2.4.2 ...

Déterminons les racines cubiques de $Z = -i$

Les racines cubiques de 1 sont : $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}, k \in \{0, 1, 2\} \implies z_0 = 1, z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}, z_2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ Or une racine cubique de $-i$ est : i donc

$$\begin{cases} Z_0 = iz_0 \\ Z_1 = iz_1 \\ Z_2 = iz_2 \end{cases} \text{ Or } i = e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ D'où } \begin{cases} Z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}} * 1 = e^{i\frac{\pi}{2}} \\ Z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} * e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{7\pi}{6}} \\ Z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} * e^{-i\frac{2\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{6}} \end{cases}$$

2.4.2 Cas particulier des racines carrées ($n = 2$)

L'équation de départ (2.2) devient :

$$z^2 = Z \tag{2.3}$$

.

Posons $z = x+iy$ et $Z = a+ib$, On a : (2.3) $\implies (x+iy)^2 = (a+ib) \iff x^2 - y^2 - 2ixy = a+ib$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

De plus, à partir de (2.3), on a : $|z^2| = |Z| \implies |z|^2 = |Z| \implies x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$

On résout alors le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$$

Exemple 2.4.3 ...

Déterminons les racines carrées de $-5 - 12i$

Cela revient à trouver $z = x + iy$ tel que $z^2 = -5 - 12i$, ici $a = -5$ et $b = -12$

$$\text{On a : } \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} \\ 2xy = -12 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ x^2 + y^2 = 13 \\ xy = -6 \end{cases}$$

En sommant les deux premières équations, on a : $x^2 = 4 \iff x = \pm 2$ dans la troisième équation :

$$\text{Pour } x = 2 \implies 2y = -6 \implies y = -3$$

$$\text{Pour } x = -2 \implies -2y = -6 \implies y = 3 \text{ D'où } \underline{S = \{-2 + 3i ; 2 - 3i\}}$$

2.4.3 Équations complexes du 2nd degré

C'est une équation de la forme :

$$az^2 + bz + c = 0 \text{ avec } (a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \quad (2.4)$$

Pour résoudre une telle équation, on éprouve la démarche suivante basée sur la méthode du discriminant :

Démarche

☞ On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Puis,

☞ On calcule une racine carrée de Δ notée δ . Et enfin,

☞ Les solutions de l'équation (2.4) sont données par : $z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$

Remarque 2.4.II

Si a, b et c sont des réels alors Δ est réel.

Exemple 2.4.4 ...

Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations $z^2 - 5z + 7 = 0$ et $z^2 - 3iz - 1 + 3i$

Résolution 2.4.1 (de la deuxième équation) *

On a : $\Delta = (-3i)^2 - 4(1)(-1+3i) = -5 - 12i$. En résolvant le système $\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} \\ 2xy = -12 \end{cases}$

, on obtient $\delta_1 = -2 + 3i$ et $\delta_2 = 2 - 3i$.

D'où, en prenant $\delta = \delta_1$, les solutions de l'équation en question sont : $\begin{cases} z_1 = \frac{3i - (-2 + 3i)}{2 \times 1} \\ z_2 = \frac{3i + (-2 + 3i)}{2 \times 1} \end{cases}$

$$\underline{D'où \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = -1 + 3i \end{cases}}$$

2.4.4 Équations complexes du n^{ième} degré

Ces équations sont de la forme :

$$P(z) = 0 \text{ avec } P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \text{ où } (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \quad (2.5)$$

Procédure de résolution de l'équation (2.5)

☞ On cherche une racine évidente. Puis,

☞ On utilise la méthode par identification ou celle de la division euclidienne.

Remarque 2.4.III

Si $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et z_0 est solution de (E) alors $\overline{z_0}$ l'est aussi.

Exercice 2.4.1 ...

Résolution dans $\mathbb{C}$

1. Soit $P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 4z + 8, z \in \mathbb{C}$
 - a) Calculer $P(i)$.
 - b) Résoudre $P(z) = 0$
2. soit $Q(z) = z^3 - (1 - i)z^2 + z - 1 + i, z \in \mathbb{C}$
 - a) Démontrer que Q admet deux solutions imaginaires pures.
 - b) En déduire la résolution de $Q(z) = 0$

Solution 2.4.1 ✱

1. (a) $P(i) = 0$
(b) $S = \{2 - 2i, 2 + 2i, -i, i\}$
2. (a) Les imaginaires purs sont i et $-i$.
(b) $S = \{-i, i, 1 - i\}$

2.5 Configuration du plan et nombres complexes

TABLEAU RÉCAPITULATIF

<i>Natures</i>	<i>Configuration</i>	<i>Caracté. géométrique</i>	<i>Caracté. complexe</i>
Triangle ABC isocèle		$\begin{cases} AB = AC \\ \text{mes}\hat{A} = \alpha \end{cases}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha} \text{ (ou } e^{-i\alpha})$
Triangle ABC équilateral		$\begin{cases} AB = AC = BC \\ \text{mes}\hat{A} = \frac{\pi}{3} \end{cases}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ (ou } e^{-i\frac{\pi}{3}})$
Triangle ABC rectangle en A		$\text{mes}\hat{A} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = bi, b \in \mathbb{R}^*$
Triangle ABC rectangle isocèle en A		$\begin{cases} AB = AC \\ \text{mes}\hat{A} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i \text{ (ou } -i)$
Trois points A, B et C sont alignés		$\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$
Les points A, B, C et D sont cocycliques		$\begin{cases} \text{mes}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \\ \text{mes}(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \end{cases}$	$\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} \div \frac{z_D - z_B}{z_D - z_A} \in \mathbb{R}^*$

2.6 Exercices d'entraînement

2.6.1 Exercices niveau 1 : Faciles

Exercice 2.6.1 ...

- Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants $2 + 4i$, $5 - 2i$, i , 0 , $(2 - i)(2 + 5i)$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On donne $z = 2x^2 + 2x - 4 + ix$. Déterminer x pour que :
 - z soit nul.
 - z soit un réel.
 - z soit un imaginaire pur.

Exercice 2.6.2 ...

- Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :
$$z_1 = (2 + i)(1 - i) - (3 + 2i),$$
$$z_2 = \frac{1}{2 - i\sqrt{3}}, \quad z_3 = \frac{5 + 4i}{2 - i},$$
$$z_4 = \frac{3 - 3i}{i}, \quad z_5 = (1 + i)^2(1 - 3i)^3.$$
- Soit A, B et C des points d'affixes respectives $z_A = 1 - 2i$, $z_B = i$ et $z_C = 5 + i$. Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis calculer l'affixe du point D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 2.6.3 ...

- Déterminer le module et le conjugué des nombres complexes suivants :
$$2 + 4i, \quad 2i(2 + 4i), \quad 3 - i, \quad \frac{2 + i}{3 - 6i},$$
$$(2 + i)^7$$
- Soit $z \in \mathbb{C}$ et M_z . Placer les points $M_1(-z)$, $M_2(\bar{z})$ et $M_3(-\bar{z})$.
- Déterminer et construire l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que :
 - $|z + 3| = |z - i|$.
 - $|2 + iz| = 3$.
 - $|1 + i\bar{z}| = 2$.

Exercice 2.6.4 ...

- Écrire z sous forme algébrique dans chacun des cas suivants :
 - $|z| = 3$ et $\text{Arg}(z) = \frac{3\pi}{4}$.
 - $|z| = 1$ et $\text{Arg}(z) = \frac{18\pi}{3}$.
- Déterminer la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :
$$1 + i, \quad -i, \quad 1, \quad (1 + i)e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad \frac{1 + i}{e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

- On donne $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ et $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$. Écrire sous forme exponentielle : $z_1 \times z_2$, $(z_1)^{12}$, $\frac{1}{z_2}$, et $\frac{z_1}{z_2}$.

Exercice 2.6.5 ...

- Soit $A(\sqrt{3} + 2i)$, $B(\sqrt{3} + i)$, $C(-2i)$ et $D(1 - i)$. Calculer $\text{mes}(\widehat{AB, CD})$.
- Soit $A(1 + i)$, et $B(-1 + i\sqrt{3})$. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que les A, B et $M(z)$ soient alignés.
- Soient $A(1 + 2i)$ et $B(4 + 5i)$. Déterminer l'affixe z_C du point C pour que ABC soit rectangle isocèle en A .

Exercice 6

- Déterminer le module et un argument de : $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.
- En déduire la forme exponentielle de z_1 et z_2 .
- Calculer les complexes suivants :
 - $z = (1 + i\sqrt{3})^5 + (1 - i\sqrt{3})^5$.
 - $z' = (1 + i\sqrt{3})^5 - (1 - i\sqrt{3})^5$.
- Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$.

2.6.2 Exercices de niveau 2 : Renforcement

Exercice 2.6.6 ...

- Soit z un nombre complexe de module 1 et d'Argument 2θ avec $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Calculer le module et l'argument en fonction de θ si possible des nombres complexes suivants :
 - $\bar{z}$.
 - $1 + z$.
 - $1 - z$.
 - $\frac{(1 - z)^2}{\bar{z}(1 + z)}$.
- Soient $Z_1 = 1 + i$ et $Z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.
 - Déterminer le module et l'argument de Z_1 et Z_2 .
 - Écrire sous forme algébrique et sous forme trigonométrique le produit $Z_1 \times Z_2$.

- (c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 2.6.7 ...

On donne le nombre complexe $z = \frac{1 + \sqrt{2} - i}{1 + \sqrt{2} + i}$.

1. Mettre z sous forme algébrique.
2. Calculer le module et un argument de z .
3. Calculer z^8 et z^{1989} .

Exercice 2.6.8 ...

On considère l'équation

$$(E) : z \in \mathbb{C}, z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 = 0.$$

1. (a) Montrer que (E) admet une solution réelle z_1 que l'on précisera.
(b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que pour tout complexe z , on ait :

$$z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 = (z - 1)(z - 2 - 2i)(az + b).$$
(c) Résoudre (E) .
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère les points A, B et C d'abscisses respectives $1, 2 + 2i$ et $1 - i$.
(a) Représenter A, B et C .
(b) Déterminer le module et un argument de $\frac{2 + 2i}{1 - i}$ et de $\frac{z_B}{z_A}$.
En déduire la nature du triangle OBC . Que représente la droite (OA) pour ce triangle ? justifier.
(c) D est le point d'abscisse 2. Quelle est la nature du quadrilatère $OCDB$? justifier.

Exercice 2.6.9 ...

Soit l'application f définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ par

$$f(z) = \frac{z - 2i}{z + 1}. \text{ On désigne par } A, B, M \text{ et } M' \text{ les points du plan d'abscisses respectives } -1, 2i, z \text{ et } f(z).$$

1. Calculer le module et un argument de $f(i)$.
2. Interpréter géométriquement $|f(z)|$ et pour $z \neq -1, z \neq 2i$, arg $f(z)$.
3. Déterminer et représenter les ensembles :
(a) (E_1) des points M d'abscisse z tels que $|f(z)| = 1$.
(b) (E_2) des points M d'abscisse z tels que $f(z)$ soit un réel strictement négatif.
(c) (E_3) des points M d'abscisse z tels que $f(z)$ soit imaginaire pur.

4. (a) Calculer pour $z \neq -1, |f(z) - 1| * |z + 1|$.
(b) On suppose que M décrit le cercle de centre A et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Montrer M' appartient à un cercle que l'on précisera.

Exercice 2.6.10 ...

On considère les nombres complexes suivants :

$$z_1 = (1 - i)(1 + 2i), \quad z_2 = \frac{2 + 6i}{3 - i}, \quad z_3 = \frac{4i}{i - 1}$$

M_1, M_2 et M_3 désignent respectivement leurs images respectives dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

1. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de z_1, z_2 et z_3 .
2. Placer M_1, M_2 et M_3 sur le plan complexe.
3. Calculer $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ puis en déduire la nature du triangle $M_1M_2M_3$.
4. Construire le point M_4 pour que $M_1M_2M_3M_4$ soit un parallélogramme et déterminer son abscisse z_4 .

Exercice 2.6.11 ...

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^5 = 1$.
Représenter les points images des solutions dans le plan complexe de base orthonormée $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
Quelle est la nature de la figure obtenue ?
2. (a) Montre que la somme des solutions de l'équation (E) est nulle.
(b) En déduire que $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$.
(c) Démontrer que $\cos \frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation $4X^2 + 2X - 1 = 0$.
En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$.
3. Soit l'équation $(E') : (z - 1)^5 = (z + 1)^5, z \in \mathbb{C}$.

- (a) Démontrer que si z_0 est solution de (E') alors $\left| \frac{z_0 - 1}{z_0 + 1} \right| = 1$. En déduire que les solutions de (E') sont des imaginaires pures.
- (b) Résoudre (E') .

Exercice 2.6.12 ...

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation complexe suivante :

$$z^2 - (2 + i)z - 1 + 7i = 0.$$

2. Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On considère les points A et B du plan d'affixes respectives $-1+2i$ et $3-i$.
- Déterminer l'écriture complexe et les éléments caractéristiques de la rotation r d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme le point A en B .
 - Soit l'homothétie h de centre Ω d'affixe $1+i$ et de rapport -2 . Identifier la transformation $F = h \circ r$ (en le justifiant) et donner ces éléments caractéristiques.
 - Déterminer l'image de la droite $(\Delta) : 3x + 4y - 5 = 0$.

Exercice 2.6.13 ...

- Les points A, B, C ont pour affixes respectives : $z_A = -1+i, z_B = 2+i, z_C = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$.
 - Placez les points A, B, C .
 - Calculez les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
 - Déduisez de la question 2. les longueurs AB, AC, BC . Le triangle ABC est-il rectangle en C ?
- Représentez dans le plan complexe, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la condition donnée.

$$|z-3| = |z-(1+i)|; \arg(z-3i) = \frac{\pi}{2}.$$

$$|z+3-i| \leq 2; \arg(i(z+1)) = -\frac{\pi}{2}.$$

$$|z| < |z+3-i| < 2; \arg(4i-2z) = \frac{3\pi}{4}.$$

INDICATIONS :

On peut bien sûr, utiliser les calculs analytiques, en posant $z = x+iy$. On a cependant avantage à raisonner en termes de distances ($|z_A - z_B| = AB$)

$$\arg z_M = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \text{ et } \arg(z_B - z_A) = (\vec{u}, \overrightarrow{AB}).$$

Exercice 2.6.14 ...

On considère l'équation

$$(E) : z \in \mathbb{C}, z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = 0.$$

- Montrer que (E) admet une solution réelle z_1 que l'on précisera.
 - Déterminer les nombres complexes a et b tels que pour tout complexe z , on ait :

$$z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = (z-1)(z-2-2i)(az+b).$$

(c) Résoudre alors l'équation (E) .

- Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $1; 2+2i$ et $1-i$.
 - Représenter A, B et C .
 - Déterminer le module et un argument de $\frac{2+2i}{1-i}$ et de $\frac{z_B}{z_A}$.
 - En déduire la nature du triangle OBC .
 - Déterminer l'affixe du point D pour le quadrilatère $OCDB$ soit un parallélogramme.

2.6.3 Exercice de niveau 3 : Classiques

Exercice 2.6.15 ...

- Soit α un nombre réel. Exprimer en fonction de $\cos(\alpha)$ l'expression :

$$A(\alpha) = 4\sin^2(\alpha) + 4\cos(\alpha) - 5.$$
- On suppose que $\alpha \in]0; 2\pi[$. Déterminer suivant les valeurs de α les nombres complexes z_1 et z_2 vérifiant :

$$\begin{cases} z_1 \neq z_2 \\ z_1 + z_2 = 2\sin(\alpha) + 1 \\ z_1 \times z_2 = (1 - \cos(\alpha)) + i\sin(\alpha) \end{cases}$$
 On écrira z_1 et z_2 sous forme algébrique et trigonométrique.

Exercice 2.6.16 ...

- Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct, on pose $Z = \frac{9\sqrt{3}}{2}(1 - i\sqrt{3})$.
 - Mettre Z sous forme trigonométrique.
 - Calculer les racines 5-ième (cinquième) de Z et représenter les points images sur un cercle.
- On donne les nombres complexes z_1 et z_2 définis par :

$$Z_1 = -8\sqrt{3}+8i \text{ et } Z_2 = (\sqrt{6}-\sqrt{2})+i(\sqrt{6}+\sqrt{2}).$$
 - Écrire le nombre complexe Z_1 sous forme trigonométrique. Déterminer les racines carrées de Z_1 sous forme trigonométrique.
 - Calculer $(Z_2)^2$.
 - Utiliser ce dernier résultat pour exprimer les racines carrées de Z_1 sous forme algébrique.

- (d) En déduire de ce qui précède la valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 2.6.17 ...

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct (Unité : 2cm).

Soit θ un nombre réel avec $\theta \in [-\pi; \pi]$.

- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation :
(E) : $Z^2 - 4\sin(\theta)Z + 4 = 0$.
- Calculer le module et un argument de chacune des solutions de l'équation (E), puis du nombre complexe $U = \frac{2 - Z_1}{2 - Z_2}$.
- Exprimer en fonction de θ $S = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$ et $S' = Z_1^4 + Z_2^4$.
- Pour quelles valeurs de θ a-t-on $S' = 0$.

Exercice 2.6.18 ...

- On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme P défini par : $P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4$. Ce polynôme admet trois racines a, b et c qui sont des nombres complexes.

(a) Sans calculer a, b et c , déterminer :

- $\alpha = a + b + c$.
- $\beta = ab + ac + bc$.
- $\delta = abc$.
- $\varphi = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

(b) On donne $a = 1; b = 2 + 2i$. En déduire c .

- Dans le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = 1, Z_B = 2 + 2i$ et $Z_C = 1 - i$.

(a) Placer les points A, B et C sur le repère.

- (b)
- Écrire sous forme trigonométrique $\frac{b}{c}$.
 - En déduire la nature du triangle OBC .

(c) Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ? Justifier la réponse.

(d) Soit D le point d'afixe $d = c(1 - e^{i\frac{\pi}{2}})$.

- Déterminer la forme algébrique de D .
- Quelle est la nature de $OCDB$?

Exercice 2.6.19 ...

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct. On considère le point A_1 d'afixe

$$Z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- Calculer $|Z_1|$. En déduire que A_1 est sur le cercle (C) de centre O et de rayon 1. Représenter A_1 sur le repère (Unité : 4cm).
- On considère le point A_0 d'afixe 1 et les points A_n d'affixes $Z_n = (Z_1)^n$ où n est un entier naturel non nul.

(a) Calculer Z_2 . Représenter A_0 et A_2 sur le même repère.

(b) Calculer $|Z_n|$. En déduire que les points A_n sont sur le cercle C .

- Démontrer que :

$$Z_{n+1} - Z_n = (Z_1)^n \left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right].$$

En déduire le module de $Z_{n+1} - Z_n$ puis la distance $A_n A_{n+1}$.

- Déduire des questions précédentes que les triangles $OA_n A_{n+1}$ sont équilatéraux.
 - Donner une mesure des angles $A_n O A_{n+1}$. En déduire que $A_6 = A_0$
 - Représenter les points A_n sur le même repère.

Exercice 2.6.20 ...

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct (Unité : 1cm). On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$(E) : z^2 - (4+i)z + 5(1+i) = 0$$

et

$$(E') : z^3 - (8+5i)z^2 + (17+25i)z - 40i = 0$$

- Résoudre l'équation (E).
- Résoudre l'équation (E') sachant qu'elle admet une racine dont le point image dans le plan complexe appartient à la droite d'équation : $y = x$.
- On désigne par E, F et G les points d'afixes respectives $z_1 = 4 + 4i, z_2 = 1 + 2i$ et $z_3 = 3 - i$.

(a) On pose $Z = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - 2}$. Écrire Z sous forme algébrique et en déduire la nature de triangle EFG .

(b) Déterminer l'afixe du point H pour que $EFGH$ soit un carré.

CHAPITRE 3

GÉOMÉTRIE ET NOMBRES COMPLEXES

Sommaire

3.1 Définitions	36
3.1.1 Similitude	36
3.1.2 Isométrie	36
3.1.3 Similitude directe	36
3.2 Similitude directe plane	36
3.2.1 Définition	36
3.2.2 Nature et éléments caractéristiques de $z' = az + b$	37
3.2.3 Obtention de l'écriture complexe d'une similitude directe plane	37
3.3 Récapitulation	38
3.4 Lieu géométriques et nombres complexes	39
3.4.1 Cercle de centre A et de rayon R	39
3.4.2 Droite	39
3.4.3 Demi-droite	39
3.5 Exercices d'entraînement	40
3.5.1 Exercices de niveau 1	40
3.5.2 Exercices de niveau 2	42

Objectifs pédagogiques

L'élève doit être capable de :

- ☞ Trouver le rapport et l'angle orienté d'une similitude directe $\mathbf{S}$ définie par la donnée dans le plan de deux points distincts et leurs images.
- ☞ Trouver le centre de $\mathbf{S}$ dans le cas où $\mathbf{S}$ n'est pas une translation (pour la construction géométrique de ce centre, on ne limitera aux cas simples).
- ☞ Construire l'image d'une image figure simple par $\mathbf{S}$.
- ☞ Trouver la transformation de $\mathbb{C}$ associée à une *translation*, une *homothétie*, une *rotation* et d'une symétrie orthogonale d'axe (OI) (resp. OJ).
- ☞ Trouver la transformation de $\mathbb{C}$ associée à une similitude directe donnée :
 - Soit par son centre, son rapport et son angle,
 - Soit par deux points distincts et leurs images.
- ☞ Construire l'image par $\mathbf{f}$ d'un point donné, trouver l'ensemble des points invariants par $\mathbf{f}$, trouver l'expression analytique de $\mathbf{f}$ où $\mathbf{f}$ est une transformation plane donnée par sa transformation associée de $\mathbb{C}$.

Introduction

Durant ce chapitre, nous allons apprendre comment avoir une belle vie (futur=image) connaissant notre passé (objet) à partir d'une relation simple (transformations planes).

3.1 Définitions

3.1.1 Similitude

DÉFINITION 3.1.1 ❀

*Une similitude est une transformation qui multiplie toutes les distances d'une figure par une constante fixe appelée **rapport**.*

L'image de toute figure par une similitude est une figure semblable c'est à dire de même figure.

Exemple 3.1.1 ... 🖋️

La classe de Terminale D est représentée sur une feuille par un dessin à partir d'une échelle $1/10$. Dans ce cas le dessin est l'image de la classe à partir de la similitude de rapport $k = 1/10$.

3.1.2 Isométrie

DÉFINITION 3.1.2 ❀

Une isométrie est une transformation qui conserve les distances qui sont des cas particuliers de similitudes.

Elle transforme les figures en des figures de même tailles et de même formes. Les autres similitudes sont des composées d'une isométrie ou et d'une homothétie qui agrandit ou réduit la taille des figures.

3.1.3 Similitude directe

Parmi les similitudes qui ne conservent pas de distances, certaines conservent l'orientation des angles, elles sont appelées **similitude directe**. C'est ces dernières transformations qui feront objet de ce chapitre. Les autres similitudes sont appelés **similitudes indirectes**.

N.B : Toutes les transformations s'effectueront dans un **plan** complexe muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ($\mathcal{P}$), d'où l'expression similitude directe plane.

3.2 Similitude directe plane

3.2.1 Définition

DÉFINITION 3.2.1 ✱

On appelle *similitude directe plane* toute transformation du plan qui conserve les angles orientés. Elle est caractérisée par une relation liant un point (objet) à son image. Cette relation est appelée **écriture complexe** et est définie par : $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. et dans laquelle z et z' désignent respectivement les affixes du point objet M et de son image M' .

3.2.2 Nature et éléments caractéristiques de $z' = az + b$

Soit s une similitude directe plane d'écriture complexe $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Translation ($a = 1$)

La similitude s est une translation lorsque $a = 1$. Dans ce cas, on dit que s est une translation (nature) caractérisée par le vecteur translaté $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}} = b$.

Similitude directe plane

Si $a \neq 1$, s admet un point invariant noté Ω (appelé centre) dont l'affixe ω vérifie l'équation $\omega = a\omega + b$. La résolution de cette dernière équation donne $\omega = \frac{b}{1-a}$. C'est ainsi que si $a \neq 1$, on dit que la similitude directe plane s est caractérisée par le centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$, d'angle $\theta = \text{Arg}(a)$ et de rapport $k = |a|$.

Remarque 3.2.I (Importantes)

- Un point est dit invariant si son image par la transformation est elle-même. Ainsi, puisque Ω est un point invariant, alors son image est lui-même.
- Pour $a = -1 \Rightarrow z' = -z + b$, et s prend le nom d'une **symétrie centrale** de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{2}$.
- Si $|a| = 1$, s prend le nom d'une **rotation** de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ et d'angle $\theta = \text{Arg}(a)$.
- Si $a \in \mathbb{R}^- \setminus \{1\}$, s prend le nom d'une **homothétie** de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ et de rapport $k = a$.
- Au regard des deux derniers points précédents, on peut affirmer qu'une similitude directe plane est la **composée** d'une rotation et d'une homothétie. Ainsi $s = \text{hor}$ ou $s = \text{roh}$ avec r et h qui représentent respectivement la rotation et l'homothétie.

3.2.3 Obtention de l'écriture complexe d'une similitude directe plane

Connaissant ses éléments caractéristiques

Soit s , une similitude directe plane caractérisée par son centre Ω d'affixe ω , son angle θ et son rapport k . Pour obtenir son écriture complexe, on épouse la formule suivante :

$$z' = ke^{i\theta}(z - \omega) + \omega. \quad (3.1)$$

Connaissant deux points et leurs images

Soit s une similitude directe plane transformant A en B puis C en D c'est - à - dire $s(A) = B$ et $s(C) = D$. Ayant en possession ces dernières informations, pour déterminer l'écriture complexe de la similitude, on fait l'effort pour résoudre le système de deux équation à deux inconnues ci-dessous après avoir supposant que ce que l'on cherche est de la forme $z' = az + b$ où a et b sont les inconnues que nous viserons :

$$\begin{cases} s(A) = B \\ s(C) = D \end{cases} \implies \begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_D = az_C + b \end{cases}$$

Ainsi si vous avez compris cette démarche, que donnera ce dernier système dans le cas où s est une similitude directe de centre Ω et qui transforme le point A en B ?

Exercice 3.2.1 ...

- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation : $z' = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} + i$.
- Ciam Page 240 exercice 14.

3.3 Récapitulation

Soit une transformation d'écriture complexe : $z' = az + b$

- Une **translation** ($a = 1$) est caractérisée par son vecteur.
- Une **rotation** ($|a| = 1$) est caractérisée par son centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ et par son angle $\alpha = \text{Arg}(a)$.
- Une **homothétie** ($a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$) est caractérisée par son centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ et par son rapport $k = a$.
- Une **similitude directe plane** est caractérisée par son rapport $k = |a|$, son angle $\alpha = \text{Arg}(a)$ et son centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$.

$M(z)$ et $M'(z')$ désignent un point et son image ainsi que leur affixe par une transformations. On a le tableau suivant :

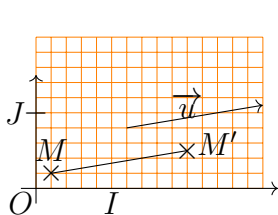


FIGURE 3.1 –

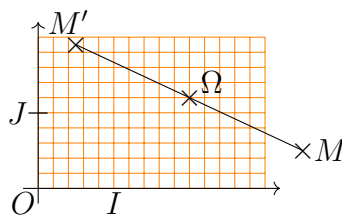


FIGURE 3.2 –

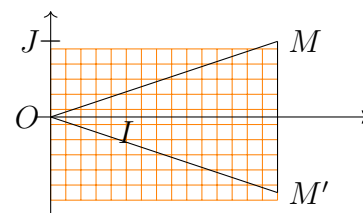


FIGURE 3.3 –

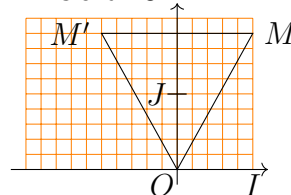


FIGURE 3.4 –

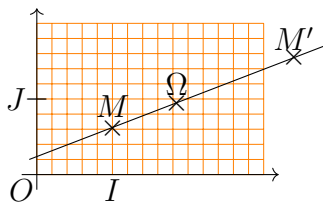


FIGURE 3.5 –

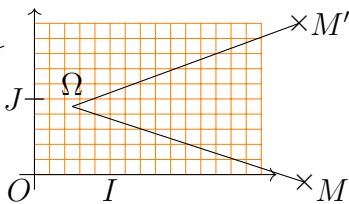


FIGURE 3.6 –

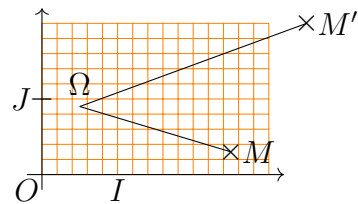


FIGURE 3.7 –

3.4 Lieu géométriques et nombres complexes

Soit $A(z_A)$, $M(z)$ et $R > 0$.

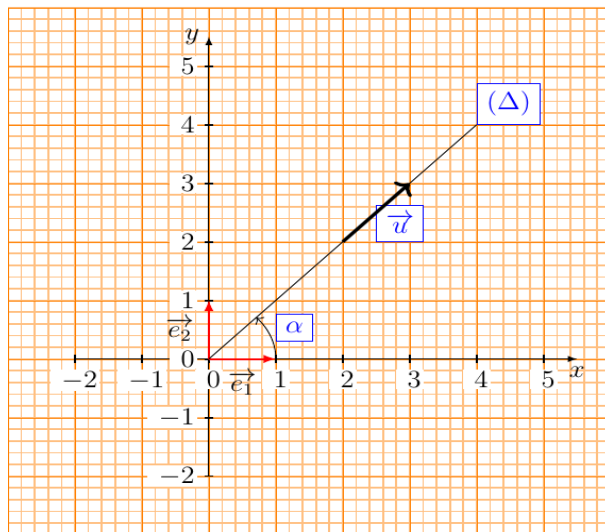
3.4.1 Cercle de centre A et de rayon R

$$M \in \mathcal{C}(A, R) \implies AM = R \iff |z - z_A| = R.$$

Nous pouvons aussi caractériser le cercle par $\widehat{AM, BM} = \frac{\pi}{2}[\pi] \iff M$ appartient au cercle de diamètre $[AB] \iff \arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff \frac{z - z_A}{z - z_B} = \alpha i$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

3.4.2 Droite

Une droite est caractérisée par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$



$$\text{Ainsi } \Delta(A, \vec{u}) : \widehat{e_1, \vec{u}} = \alpha + k\pi \Rightarrow \arg(z - z_A) = \alpha + k\pi$$

3.4.3 Demi-droite

Dans ce cas on a : $\arg(z - z_A) = \alpha + k\pi$

Exercice 3.4.1 ...

Confère BAC II (série D)2009 Exercice 2

Transformations	$(\mathcal{M}) = M'$	Définitions géométriques	Ecritures complexes
Translation de vecteur $\vec{u}$ noté $t_{\vec{u}}$	FIGURE 3.1	$t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$Z_{\overrightarrow{MM'}} = Z_{\vec{u}} \Leftrightarrow$ $Z_{M'} = Z_M + Z_{\vec{u}}$ $\mathbf{z}' = \mathbf{z} + \mathbf{b}$ avec $Z_{\vec{u}} = b$
Symétrie centrale S_{Ω}	FIGURE 3.2	$S_{\Omega}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$	$Z_{\overrightarrow{MM'}} = -Z_{\overrightarrow{\Omega M}} \Leftrightarrow$ $Z_{M'} = -Z_M + 2Z_{\vec{\Omega}}$ $\mathbf{z}' = -\mathbf{z} + 2\omega$ avec $Z_{\Omega} = \omega$
Symétrie par rapport à l'axe $(OI) : S_{(OI)}$	Figure 3.3	$S_{(OI)}(M) = M'$ $\Leftrightarrow \begin{cases} OM' = OM \\ mes(\vec{i}, \overrightarrow{OM'}) = \\ -mes(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \end{cases}$	$\mathbf{z}' = \bar{\mathbf{z}}$
Symétrie par rapport à l'axe des imaginaires pur $(OJ) : S_{(OJ)}$	Figure 3.4	$S_{(OJ)}(M) = M'$ $\Leftrightarrow \begin{cases} OM' = OM \\ mes(\vec{i}, \overrightarrow{OM'}) = \\ \pi - mes(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \end{cases}$	$\mathbf{z}' = -\bar{\mathbf{z}}$
Homothétie de centre Ω et de rapport $k : h_{(\Omega, k)}$	Figure 3.5	$h_{(\Omega, k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	$Z_{\overrightarrow{MM'}} = kZ_{\overrightarrow{\Omega M}} \Leftrightarrow$ $Z_{\Omega} = \omega$ $z' = kz + \omega(1 - k)$
Rotation de centre Ω et d'angle $\alpha : r_{(\Omega, \alpha)}$	Figure 3.6	$r_{(\Omega, \alpha)}(M) = M'$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ mes(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha \end{cases}$	$Z_{\overrightarrow{MM'}} = e^{i\alpha} Z_{\overrightarrow{\Omega M}} \Leftrightarrow$ $Z_{\Omega} = \omega$ $z' = e^{i\alpha} z + \omega(1 - e^{i\alpha})$
Similitude de centre Ω , d'angle α et de rapport $k : S_{(\Omega, \alpha, k)}$	Figure 3.7	$S_{(\Omega, \alpha, k)}(M) = M'$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = k\Omega M \\ mes(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha \end{cases}$	$Z_{\overrightarrow{MM'}} = ke^{i\alpha} Z_{\overrightarrow{\Omega M}} \Leftrightarrow$ $Z_{\Omega} = \omega$ $z' = ke^{i\alpha} z + \omega(1 - ke^{i\alpha})$

3.5 Exercices d'entraînement

3.5.1 Exercices de niveau 1

Exercice 3.5.1 ...

Le plan est muni d'un repère orthonormé directe $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

- soient $\vec{u}(3 - 2i)$ et $\Omega(1 - i)$. Déterminer

l'écriture complexe des transformations suivantes : $t_{\vec{u}}, h_{(O, \frac{3}{2})}, r_{(O, \frac{\pi}{6})}$ et $r_{(\Omega, \frac{\pi}{6})}$.

- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations du plan qui au point $M(z)$ associe le point $M'(z)$:

- (a) $h : z' \mapsto z - i$.
- (b) $f : z' \mapsto 3z - 4i$.
- (c) $g : z' \mapsto (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})z$.

Exercice 3.5.2 ...

Le plan est muni d'un repère orthonormé directe $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On donne $A(1 + \frac{1}{2}i)$ et $B(2 + i)$

1. (a) Vérifier que les points O, A et B sont alignés.
- (b) Déterminer le rapport et l'angle orienté de la similitude directe S de centre O qui transforme A en B .
- (c) Quelle est l'écriture complexe de S . Construire $S(B)$.
2. Déterminer, suivant les valeurs de $t \in \mathbb{C}$, la nature et les éléments caractéristiques de la transformation plane qui à tout point $M(z)$ associe $M'(z')$ tel que $z' = itz + 2 - i$.

Exercice 3.5.3 ...

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation complexe suivante :

$$z^2 - (2 + i)z - 1 + 7i = 0.$$

2. Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On considère les points A et B du plan d'affixes respectives $-1 + 2i$ et $3 - i$.
 - (a) Déterminer l'écriture complexe et les éléments caractéristiques de la rotation r d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme le point A en B .
 - (b) Soit l'homothétie h de centre Ω d'affixe $1 + i$ et de rapport -2 . Identifier la transformation $F = h \circ r$ (en le justifiant) et donner ces éléments caractéristiques.
 - (c) Déterminer l'image de la droite $(\Delta) : 3x + 4y - 5 = 0$.

Exercice 3.5.4 ...

Soit l'application f définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ par

$f(z) = \frac{z - 2i}{z + 1}$. On désigne par A, B, M et M' les point du plan d'affixes respectives $-1, 2i, z$ et $f(z)$.

1. Calculer le module et un argument de $f(i)$.
2. Interpréter géométriquement $|f(z)|$ et pour $z \neq -1, z \neq 2i$, $\arg f(z)$
3. Déterminer et représenter les ensembles :

- (a) (E_1) des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$.
 - (b) (E_2) des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un réel strictement négatif.
 - (c) (E_3) des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit imaginaire pur.
4. (a) Calculer pour $z \neq -1, |f(z) - 1| \times |z + 1|$.
 - (b) On suppose que M décrit le cercle de centre A et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Montrer M' appartient à un cercle que l'on précisera.

Exercice 3.5.5 ...

On considère l'application complexe f définie sur $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ par :

$$f(z) = iz\bar{z} + (3 - \frac{1}{2}i)\bar{z} + (-2 + \frac{1}{2}i)z + 1 + 4i.$$

1. (a) Écrire $f(z)$ sous la forme algébrique. (On pose $z = x + iy$ et $\bar{z}$ est le conjugué de z .)
- (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.
2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soit les points du plan M, M', A et B d'affixe respectif $z, f(z), z_A = i$ et $z_B = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$.
 - (a) Déterminer et construire l'ensemble (D) des points M du plan tel M' appartienne à l'axe $(O; \vec{v})$.
 - (b) Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M du plan tel M' appartienne à l'axe $(O; \vec{u})$.
 - (c) Soit (Π) le demi-plan contenant le point O et de frontière l'ensemble (D) et $k \in \mathbb{Z}$.
Démontrer que $\arg(f(z)) = 2k\pi$ si et seulement si $M \in (\Pi) \cap (C)$. Dédurre la nature de l'ensemble (Γ) des points M du plan tel que $\arg(f(z)) = 2k\pi$.

3. On donne les points Ω et A' d'affixes respectives $\omega = 2 - i, z_{A'} = 2 + i$ et F une similitude direct de centre Ω transformant A en A' .

- (a) Déterminer l'écriture complexe et les éléments caractéristiques de F .
- (b) Déterminer et construire l'ensemble (Ω') image de (Ω) par F .

Exercice 3.5.6 ...

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Unité 2cm.

- Placer les points K, L, M d'affixes respectives $z_K = 1 + i, z_L = 1 - i, z_M = -i\sqrt{3}$. On complétera la figure dans les questions suivantes.
- On note N le symétrique de M par rapport à L .
Vérifier que l'affixe z_N de N est $2 + i(\sqrt{3} - 2)$.
 - La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme le point N en le point C et le point M en le point A .
Déterminer les affixes z_A et z_C des points A et C .
 - La translation du vecteur d'affixe $2i$ transforme le point M en D et le point N en B .
Déterminer les affixes z_D et z_B des points D et B .
- Montrer que le point K est le milieu des segments $[DB], [AC]$.
 - Montrer que $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = i$.
 - En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.
- Soit M' un point du plan d'affixe z . Déterminer et construire l'ensemble des points M' tel que $\text{Arg}\left(\frac{z_C - z}{z_A - z}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

3.5.2 Exercices de niveau 2

Exercice 3.5.7 ...

Soient A, B, C et D quatre points du plan complexe d'affixes respectives $Z_A = 3, Z_B = 2 + i, Z_C = 3 + 2i$ et $Z_D = 1 + 2i$.

- Donner l'écriture complexe de la similitude directe f qui laisse invariant le point B et transforme A en C .
 - Donner les éléments caractéristiques de f .
- Donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g du plan dont l'écriture complexe est $Z' = 2Z + 6 + 2i$.
 - En déduire l'écriture complexe, la nature et les éléments caractéristiques de $g \circ f$.
- Soit la transformation S du plan dont l'écriture complexe est : $Z' = 21Z + 5i$.
 - Donner la nature et les éléments caractéristiques de S .

- Déterminer l'affixe du point E du plan dont l'image par S est D .
- donner la nature du triangle BDE .

Exercice 3.5.8 ...

Soit φ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $Z \mapsto iZ + 1 + 3i$ et f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe $\varphi(Z)$. On note le point Ω d'affixe $2 + i$.

- Déterminer l'image par f du point Ω .
- Soit Z un nombre complexe distinct de $2 + i$.
 - Donner une interprétation géométrique du module et d'un argument du nombre complexe $\frac{\varphi(Z) - 2 - i}{Z - 2 - i}$ en utilisant les points Ω, M et M' .
 - Montrer que $\frac{\varphi(Z) - 2 - i}{Z - 2 - i}$ est une constante à calculer.
- Déduire des questions précédentes, la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.
- Définir analytiquement f .
- Déterminer et construire l'image de la droite (Δ) d'équation : $y = x$ par f .

Exercice 3.5.9 ...

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct, on considère l'application f qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' définie par : $Z' = a^3z + a - 1$ où a désigne un nombre complexe.

- Déterminer l'ensemble des nombres complexes a pour lesquels f est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.
Caractériser f pour chacune des valeurs trouvées.
- Déterminer l'ensemble des nombres complexes a pour lesquels f est une translation.
Caractériser f pour chacune des valeurs trouvées.
- Déterminer l'ensemble des nombres complexes a pour lesquels f est une homothétie de rapport 8.
Caractériser f pour chacune des valeurs trouvées.
- Caractériser f lorsque $a = \sqrt{3} + i$

Exercice 3.5.10 ...

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points

$A; M_1$ et M_2 d'affixes respectives $-i, z_1$ et z_2 telles que : $\frac{z_1 + i}{z_2 + i} = re^{i(\theta - \pi/2)}$; $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et $r \in \mathbb{R}_*$

1. (a) Déterminer respectivement en fonction de r et θ , le module et un argument du nombre complexe :

$$Z = \frac{z_1 + i}{z_2 + i}.$$

- (b) En déduire alors la forme trigonométrique de Z .
2. Déterminer alors les valeurs de θ pour que les points A, M_1 et M_2 soient alignés.
3. (a) Déterminer θ pour que le triangle AM_1M_2 soit rectangle en A .
- (b) On suppose que AM_1M_2 soit rectangle en A .
 - b.1/ Vérifier que

$$z_2 = i \left[-\frac{1}{r}(z_1 + i) - 1 \right].$$
 - b.2/ En déduire que M_2 est l'image de M_1 par une similitude dont on préciser les caractéristiques.

- (b) En déduire la construction de l'image M' par f d'un point quelconque M du plan.

Exercice 3.5.11 ...

Le plan ($\mathcal{P}$) est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les jolis points A, B et E d'affixes respectives $-4, 4$ et $4i$, puis les points C et D tels que les quadrilatères $AOEC$ et $BOED$ soient des carrés.

1. Placer les points précédents dans le repère, puis déterminer les affixes des points C et D . 1.25
2. Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe Z , associe le point M' d'affixe Z' tel que : $Z' = (1 + i)Z + 4 + 4i$.
 - (a) Donner, avec une forte précision, la nature et les éléments caractéristiques de f .
 - (b) Préciser $f(A)$ et $f(O)$.
 - (c) Déterminer l'image par f de la droite (CA) , puis celle de la médiatrice (Δ) de $[OA]$.
3. (a) Exprimer en fonction de Z , l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{MC}$.
En déduire que : $MM' = MC$ et pour M distinct de C , $Mes(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{2}$.

Deuxième partie

ANALYSE

CHAPITRE 4

LIMITES-CONTINUITÉS

Sommaire

4.1 Limites	46
4.1.1 Rappels (Notions de base : limites de référence)	46
4.1.2 Limites à gauche, limite à droite	46
4.1.3 Opérations sur les limites	47
4.1.4 Limite d'une fonction composée	48
4.1.5 Calcul de limites	48
4.1.6 Propriétés de comparaison	49
4.1.7 Théorème d'encadrement	49
4.1.8 Théorème des gendarmes	49
4.2 Continuité d'une fonction	49
4.2.1 Continuité en un point	49
4.2.2 Continuité sur un intervalle	50
4.2.3 Prolongement par continuité	50
4.2.4 Image d'un intervalle par une fonction continue	50
4.2.5 Calcul approché des zéros d'une fonction continue	51
4.2.6 Bijection	51
4.2.7 Fonction puissance d'exposant rationnel	52
4.3 Exercices d'entraînement	53

Objectifs pédagogiques

Une fonction numérique étant donnée par une formule explicite, après avoir donné l'ensemble de définition D_f , *L'élève doit être capable de :*

- ☞ Reconnaître si f est continue. Sinon en quel(s) point(s) de D_f elle ne l'est pas.
- ☞ Trouver les limites de f aux bornes de D_f , éventuellement, prolonger f par continuité en certains points.
- ☞ Étudier la continuité aux points éventuels de raccordement.
- ☞ Trouver l'image par f d'un intervalle,
- ☞ Calculer la limite de $g \circ f$ en un point de $D_{g \circ f}$ où f et g sont deux fonctions.
- ☞ Reconnaître si $g \circ f$ est continue en un point donné de $D_{g \circ f}$.

4.1 Limites

4.1.1 Rappels (Notions de base : limites de référence)

$\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0, n \in \mathbb{N}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{2n+1}} = \begin{cases} \infty & \text{si } n < 0 \\ 0 & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2n}} = +\infty$ si $n > 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$, si n est pair	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty$ si n est impair	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$

Exemple 4.1.1 ...

Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{(x-3)^5}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\lambda x)}{x}$

4.1.2 Limites à gauche, limite à droite

Exercice 4.1.1 ...

Soit $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$. Étudier la limite de f en 2.

Résolution

— Calculons D_f puis posons $N(x) = x+1$ et $D(x) = x-2$

On a : $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ et $N(2) = 3, D(2) = 0$. De plus :
on a le tableau de signe de $D(x)$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$

— D'où

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x-2} = -\infty \text{ car } \begin{cases} x+1 \rightarrow 3 > 0 \\ x-2 \rightarrow 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x-2} = +\infty \text{ car } \begin{cases} x+1 \rightarrow 3 > 0 \\ x-2 \rightarrow 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$$

— Par conséquent :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty}$$

4.1.3 Opérations sur les limites

LES TABLEAUX RÉCAPITULATIFS

Soient f et g deux fonctions numériques, l et l' sont des nombres réels, a est un nombre réel ou un infini.

Limites de la somme

La limite de la somme de deux fonctions est égale à la somme des limites c'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) =$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	On ne peut pas conclure

Limites du produit

La limite du produit de deux fonctions est égale au produit des limites c'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \times \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right)$$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	l	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) =$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	On ne peut pas conclure

Limites du quotient

La limite du quotient de deux fonctions est égale au quotient des limites c'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	$l' (l' \neq 0)$	$+\infty$	$-\infty$	$l' (l' > 0)$	$l' (l' < 0)$	$l' (l' > 0)$	$l' (l' < 0)$	0	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right) (x) =$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Indéter.	Indéter.

D'après ces tableaux, on a quatre formes indéterminées qui sont : $-\infty + \infty$, $0 \times \infty$,
et $\frac{\infty}{\infty}$.

4.1.4 Limite d'une fonction composée

DÉFINITION 4.1.1 ✿

Soient f et g deux fonctions numériques et D_f ; D_g leur ensemble de définition respectifs. On a :

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\}$$

Exemple 4.1.2 ... ✍

Soient $g(x) = \sqrt{x}$ et $f(x) = 2x - 1$. Déterminer l'ensemble de définition de $g \circ f$

Propriété 4.1.1 ✿

Soient a, l et $l' \in \mathbb{R} = [-\infty, +\infty]$. Si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow l} g(x) = l'$$

alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = l'$$

Exemple 4.1.3 ... ✍

Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x-1}{x-1}}$$

4.1.5 Calcul de limites

Cas de fonctions polynômes et rationnelles

Soient $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ et $Q(x) = b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \dots + b_1 x + b_0$.
On a :

$$\text{Soit } Q(x) \neq 0 \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$$

Exemple 4.1.4 ... ✍

Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 3x - 1}{2x^2 - 8x + 1}$$

Cas de fonctions irrationnelles

Dans ce cas, on utilise soit une **factorisation**, soit **l'expression conjuguée**.

Exemple 4.1.5 ... ✍

Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x}) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 9} + x)$$

Utilisation du taux de variation

On a :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Exemple 4.1.6 ... 

Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

4.1.6 Propriétés de comparaison

Propriété 4.1.2 ✿

$\forall x \in]a, +\infty[, f$ et g deux fonctions définies sur $]a, +\infty[$.

- Si $f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- Si $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- Si $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l'$ alors $l \leq l'$

Exemple 4.1.7 ... 

Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin(x))$

4.1.7 Théorème d'encadrement

THÉORÈME 4.1.1 ✿

Soient f et g deux fonctions définies sur $]a, +\infty[$ et $l \in \mathbb{R}$.

Si $\forall x$ suffisamment grand on a $|f(x) - l| \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

Exemple 4.1.8 ... 

Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin(x)}{x} = 1$.

4.1.8 Théorème des gendarmes

THÉORÈME 4.1.2 ✿

Soient u, v et f trois fonctions et a un réel. $\forall x$ suffisamment grand,

si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et que $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = \lim_{x \rightarrow a} v(x)$ alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

Exemple 4.1.9 ... 

Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0} x E\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

4.2 Continuité d'une fonction

4.2.1 Continuité en un point

Soit f une fonction et $x_0 \in \mathbb{R}$. f est continue en x_0 si :

1. f est définie en x_0 et

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Exemple 4.2.1 ... 

Étudier la continuité de la fonction $f(x) = \begin{cases} (2x+1)\sin\left(\frac{1}{2x+1}\right), & \text{si } x \neq -\frac{1}{2} \\ 0, & \text{si } x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

4.2.2 Continuité sur un intervalle

Soit $I \subset \mathbb{R}$, on dit que f est continue sur I si et seulement si f est continue en tout point de I .

Exemple 4.2.2 ... 

- Toute fonction monômes est continue sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $|x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- La fonction partie entière $E(x)$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Propriété 4.2.1 ✿

Si f et g sont deux fonctions continues sur I . Alors :

- $f + g$, $f \times g$, kf ($k \in \mathbb{R}$) et $|f|$ sont continues sur I .
- Si $g \neq 0$ sur I alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I .
- Si $g \geq 0$ sur I alors $\sqrt{g}$ est continue sur I .
- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur son ensemble de définition.

4.2.3 Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie sur I ne contenant pas x_0 telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$. On appelle prolongement par continuité de f en x_0 , la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \neq x_0 \\ l, & \text{si } x = x_0 \end{cases}$

Exemple 4.2.3 ... 

Soit $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ Peut-on prolonger la fonction f par continuité en 0 ? Si oui, déterminer ce prolongement.

4.2.4 Image d'un intervalle par une fonction continue

Propriété 4.2.2 ✿

soient a et b deux nombres réels.

- ♣ Si f est une fonction continue sur un intervalle I alors $f(I)$ est un intervalle. Dans la suite, Soit f une fonction continue, On a :
- ♣ Si f est strictement croissante sur :
 - ♠ $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.
 - ♠ $]a, b[$ alors $f(]a, b[) =]\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$
 - ♠ $]a, b]$ alors $f(]a, b]) =]\lim_{x \rightarrow a} f(x), f(b)[$

- ♣ Si f est strictement décroissante sur :
- ♠ $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$.
 - ♠ $]a, b[$ alors $f(]a, b[) =]\lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
 - ♠ $]a, b]$ alors $f(]a, b]) =]f(b), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$

4.2.5 Calcul approché des zéros d'une fonction continue

Théorème des valeurs intermédiaires

THÉORÈME 4.2.1 (THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES 1) ✿

Soient a, b deux nombres réels tels que $a < b$. Si f est continue sur $[a, b]$ et si $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe au moins un nombre réel $c \in [a, b]$ / $f(c) = 0$

THÉORÈME 4.2.2 (THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES 2) ✿

Si f est continue sur $[a, b]$ et si elle est strictement monotone sur $[a, b]$ et si $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe un unique nombre réel $c \in]a, b[$ / $f(c) = 0$

Détermination des zéros de f

Pour déterminer les zéros de f , on utilise la méthode de balayage ou celle de dichotomie.

Exemple 4.2.4 ... ✍

Soit l'équation (E) : $x^3 + x + 1 = 0$.

- Démontrer que (E) admet une seule solution $x_0 \in [-1, 0]$
- Déterminer un encadrement de x_0 à 10^{-2} près.

Résolution 4.2.1 ✿

- Soit $f(x) = x^3 + x + 1$. Comme f est une fonction polynôme alors elle est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-1, 0]$.

$\forall x \in [-1, 0]$, f est dérivable en x et $f'(x) = 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $[-1, 0]$. De plus $f(-1) = -1$ et $f(0) = 1 \Rightarrow f(-1) \times f(0) < 0$. On en déduit que (E) $\iff f(x) = 0$ admet un unique solution $x_0 \in [-1, 0]$ / $f(x_0) = 0$

- Encadrement de x_0 par la méthode de balayage. On a :

x	-1	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.69	-0.68
$f(x)$	-1	-0.6	0.31	-0.04	+0.184	-0.018	0.005

-0.68

par suite $-0.69 < x_0 < -0.68$

4.2.6 Bijection

THÉORÈME 4.2.3 ✿

Soit f une fonction numérique et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si f est continue et est strictement monotone sur I alors elle réalise une bijection de I sur $J = f(I)$

Exemple 4.2.5 ... ✍

Soit

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{x-1}{2x+3}.$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $] -\frac{3}{2}, +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera.
2. Déterminer alors sa réciproque.

CONSÉQUENCE 4.2.1 ❀

1. Si f est une fonction bijective alors sa réciproque f^{-1} l'est aussi. Dans ce cas f^{-1} réalise une bijection de $f(I)$ sur I et f^{-1} a le même sens de variation que f .
2. Les représentations graphiques de f et f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$

4.2.7 Fonction puissance d'exposant rationnel

Fonction racine n -ième

DÉFINITION 4.2.1 ❀

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On appelle **Fonction racine n -ième** la bijection réciproque de la fonction bijective :

$$\begin{array}{ccc} \varphi_n : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$$

En posant $\varphi_n(x) = y$, on a $x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$ d'où la fonction racine n -ième est donnée par :

$$\varphi_n^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

Propriété 4.2.3 ❀

Soit x, y deux nombres réels strictement positifs et n un entier supérieur ou égal à 2. On a :

$$\begin{cases} x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y} = x^{\frac{1}{n}} \\ (\sqrt[n]{y})^n = y \end{cases}$$

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}_+^*, n > 2, m > 2$

$$\begin{cases} x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a} \\ (\sqrt[n]{a}) \times (\sqrt[n]{b}) = (\sqrt[n]{ab}) \\ \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \times n]{a} \\ (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \\ \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} = \sqrt[m \times n]{a^{m+n}} \end{cases}$$

Exemple 4.2.6 ... ✎

Écrire plus simplement l'expression $A = \frac{\sqrt[3]{8a^9}}{(2\sqrt{a})^3}$, avec $a > 0$

4.3 Exercices d'entraînement

♣ Limites : fonctions polynômes, fonctions rationnelles

Étudier les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -2x^3 + 12x^2 - x + 1.$
2. $f(x) = x^4 - 16x + 5.$
3. $f(x) = -x^4 + 7x^3 + 5x^2 - x + 2.$
4. $f(x) = x^5 + 4x^4 + 2x^2 + 1.$
5. $f(x) = \frac{x+1}{-2x+3}.$
6. $f(x) = \frac{x^2+x-2}{2x+1}.$
7. $f(x) = \frac{x\sqrt{2}+1}{2x^2-x+1}.$
8. $f(x) = \frac{x^3+1}{2x^3-x^2-1}.$
9. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} - \frac{x^2+1}{x+1}.$
10. $f(x) = \frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2} - \frac{x-1}{x+2}.$
11. $f(x) = \frac{2x^2-x+3}{2x+1} - \frac{x^2+1}{x-2} + 1.$
12. $f(x) = \frac{x^4+2x^3-x}{x^2+1} - \frac{x^3-x^2-x}{x+1}.$

Étudier les limites en x_0 des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-4}, \quad x_0 = -2.$
2. $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2} - \frac{2}{(x-1)^2(x+1)}, \quad x_0 = 1.$
3. $f(x) = 1 + \frac{2x^2}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{2}{(x+1)(x+2)}, \quad x_0 = -1.$
4. $f(x) = \frac{2x^2-3x-1}{x(x^2-1)} + \frac{x^2+x+1}{x^2+x} - \frac{2x+3}{x^2+2x+2}, \quad x_0 = -1.$

♣ Limites : fonctions comportant des radicaux

Étudier les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{2x^2-x+1} - 2x.$

2. $f(x) = \sqrt{2x^2-x+1} - x\sqrt{2}.$
3. $f(x) = x(\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}).$
4. $f(x) = \frac{2\sqrt{x^2+x+1} - 2x - 1}{\sqrt{x^2+1} - x}.$

♣ Limite de fonctions composées

Étudier les limites des fonctions suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}}{2x^2 + x\sqrt{x} + 1}.$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x) \sin \left(\frac{1}{x^2 + x} \right).$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{x^2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{x}} \right).$

♣ Limite et comparaison des fonctions

Étudier les limites des fonctions suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1}.$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} + \frac{2x+1}{x+1}.$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 + \cos x}.$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2x \cos x.$

♣ Continuité

Étudier la continuité des fonctions suivantes sur l'intervalle I donné :

1. $x \mapsto x^2 + x + 1, \quad I = \mathbb{R}.$
2. $x \mapsto \frac{x+1}{2x-1}, \quad I = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[.$
3. $x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}} + 1, \quad I = \mathbb{R}_*^+.$
4. $x \mapsto \sqrt{\frac{2+x}{1-2x}}, \quad I = \left[-2; \frac{1}{2} \right[.$
5. $x \mapsto \sqrt{\frac{2x-5}{x-1}}, \quad I =]-\infty; 1[.$

Étudier la continuité de la fonction suivante :

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto |x-1|$

♣ Prolongement par continuité

• Dans chacun des cas suivants, f est une fonction définie sur $]0; 1[$.

1. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.
2. $f(x) = \frac{\tan x}{x}$.
3. $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x}$.
4. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$.

Peut-on prolonger par continuité la fonction f en 1 ?

- f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie

par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{6x}{x+2}, & \text{pour } x \in]-\infty; 1[\\ f(x) = \sqrt{3x+1}, & \text{pour } x \in]1; +\infty[\end{cases}$$

Peut-on prolonger f par continuité en 1 ?

♣ *Valeur approchée*

1. On considère la fonction polynôme définie de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x - \frac{10}{4}$.
 - (a) Montrer que l'équation $(E) : f(x) = 0$ admet une seule solution dont on précisera une la valeur approchée à 10^{-2} près.
 - (b) Déterminer l'image par f de $[-1; 4[$.

CHAPITRE 5

DÉRIVÉE-PRIMITIVES

Sommaire

5.1	Dérivation	56
5.1.1	Dérivabilité en x_0	56
5.1.2	Opération sur les dérivées	57
5.1.3	Dérivée successive	57
5.1.4	Dérivée de la réciproque d'une fonction bijective	58
5.1.5	Inégalité des accroissements finis	58
5.2	Primitives	58
5.2.1	Tableaux récapitulatifs	59
5.2.2	Autre forme de calcul de primitive	60
5.3	Exercices d'entraînement	61

Objectifs pédagogiques

Une fonction numérique étant donnée par une formule explicite, après avoir donné l'ensemble de définition D_f , *L'élève doit être capable de :*

- ☞ Reconnaître si f est dérivable. Sinon en quel(s) point(s) de D_f elle ne l'est pas et déterminer sa dérivée.
- ☞ Étudier la dérivabilité aux points éventuels de raccordement.
- ☞ Trouver deux intervalles I et J tels que l'application induite g soit une bijection de I sur J et dans ce cas, représenter l'application réciproque de g .
- ☞ Déterminer $g^{-1}(x)$, préciser sur quel ensemble g^{-1} est dérivable et trouver le nombre dérivé g^{-1} en un point de cet ensemble dans des cas simples où f est donnée par une formule explicite.
- ☞ Reconnaître si $g \circ f$ est dérivable en un point donné de $D_{g \circ f}$.
- ☞ Savoir utiliser le théorème sur l'inégalité des accroissements finis.
- ☞ Déterminer une primitive de f .
- ☞ Déterminer la primitive de f prenant une valeur numérique donnée en un point donné.
- ☞ Trouver une primitive d'une fonction de la forme $f'f^\alpha$ où f est une fonction dérivable strictement positive.
- ☞ Reconnaître qu'une fonction donnée est de la forme : $(g' \circ f)f'$; $f'f^r$ ou $r \in \mathbb{Q} - \{-1\}$.

5.1 Dérivation

5.1.1 Dérivabilité en x_0

Soit f une fonction numérique et x_0 un réel.

- • On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l, (l \in \mathbb{R}) \text{ i.e. } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \text{à droite}}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \text{à gauche}}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l.$$

NB : Souvent on pose $l = f'(x_0)$

Interprétation graphique

Dans ce cas f admet une tangente T d'équation : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

- • On dit que f n'est pas dérivable en x_0 si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty, \text{ ou i.e. } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \text{à droite}}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \text{à gauche}}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Interprétation graphique

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty : (\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas.
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty : (\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.
- $\lim_{x \xrightarrow{\text{droite}} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$ et $\lim_{x \xrightarrow{\text{gauche}} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l' \text{ et } l \neq l'$ alors $(\mathcal{C}_f)$ admet deux demi-tangentes d'équations $(T_d) : y = l(x - x_0) + f(x_0)$ et $(T_g) : y = l'(x - x_0) + f(x_0)$

Exemple 5.1.1 ... 

Étudier la dérivabilité de $f(x) = \sqrt{x}$ en 0 et interpréter graphiquement la solution

5.1.2 Opération sur les dérivées

Dérivée des fonctions élémentaires

Fonction f	Fonction f'	f est dérivable sur
$x \mapsto c [c \in \mathbb{R}]$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ax (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^r (r \in \mathbb{Q}^*)$	$x \mapsto rx^{r-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^r} (r \in \mathbb{Q}^*)$	$x \mapsto -\frac{r}{x^{r+1}}$	$] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, \infty[$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[(k \in \mathbb{Z})$
$x \mapsto \cotan(x)$	$x \mapsto -\frac{1}{\sin^2(x)}$	$]k\pi, \pi + k\pi[(k \in \mathbb{Z})$

Opérations

Fonctions	$u + v$	au	uv	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$
Dérivée	$u' + v'$	au'	$u'v + uv'$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$
Condition	—	$a \in \mathbb{R}$	—	$v \neq 0$	$v \neq 0$

Compositions

fonction	$u \circ v$	u^r	$\sqrt{u}$	$\cos(u)$	$\sin(u)$
Dérivée	$v' \times u' \circ v$	$ru'u^{r-1}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$-u' \sin(u)$	$u' \cos(u)$
Condition	—	$r \in \mathbb{Q}^*$	$u(x) > 0$	—	—

Exemple 5.1.2 ...

Calculer la dérivée des fonctions suivantes : $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ et $h(x) = \sin^4(x)$

5.1.3 Dérivée successive

Soit f une fonction dérivable sur I . Si f' est dérivable sur I , sa dérivée est appelée **dérivée seconde de f** notée f'' ou f^2 . Par itération, la dérivée n -ième de f est la dérivée de $(n-1)$ -ième de f i.e $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Notation différentielle

$$f^{(1)} = \frac{df}{dx}(x) \quad f^{(2)} = \frac{d^2 f}{dx^2}(x) \dots f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}(x)$$

5.1.4 Dérivée de la réciproque d'une fonction bijective

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction bijective sur I . Si de plus, f est dérivable sur I tel que $f'(x) \neq 0 \forall x \in I$ alors la bijection réciproque f^{-1} de f est dérivable sur $f(I)$ et on a :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Exemple 5.1.3 ... 

Soit $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$. Calculer $(f^{-1})'(1)$

5.1.5 Inégalité des accroissements finis

THÉORÈME 5.1.1 ✿

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I , a et b deux éléments de I tels que $a < b$. S'il existe deux nombres des nombres M et m tels que pour tout x élément de I , $m \leq f'(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

CONSÉQUENCE 5.1.1 ✿

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I , $I \subset \mathbb{R}$. S'il existe un réel $k > 0; \forall x \in I$ tel que $|f'(x)| \geq k$ alors $\forall (a, b) \in I^2$, on a : $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$

Exemple 5.1.4 ... 

1. En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$ sur $[0, \frac{1}{2}]$, Montrer que $1 + \frac{x}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{x+1} \leq 1 + \frac{x}{2}$
2. Donner une interprétation graphique du résultat.
3. Donner un encadrement de $\sqrt{1.1}$ à 10^{-2} près.

5.2 Primitives

DÉFINITION 5.2.1 ✿

Soit f une fonction définie sur un intervalle K . On appelle primitives de f sur K , toute fonction F dérivable sur K telle que sa dérivée soit égale à f c'est-à-dire $F'(x) = f(x)$.

Exemple 5.2.1 ... 

Montrer que $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + x + c$ avec c un réel, est une primitive de $f(x) = 2x^2 + 1$

Propriété 5.2.1 ✿

— Toute fonction continue sur K admet une primitive sur K .

- Si F est une primitive de f sur K alors $\forall$ le nombre réel c la fonction qui à x associe $F(x) + c$ est aussi une primitive de f .

Exemple 5.2.2 ...

Déterminer les primitives des fonction suivantes : $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = x^3 + 3x^2$

Soit f une fonction continue sur K , x_0 un réel de K et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une et une primitive de la fonction f sur K qui prend la valeur y_0 en x_0 .

Exemple 5.2.3 ...

Déterminer les primitives de $f(x) = x^2 + \cos(3x)$ puis en déduire la primitive de f qui prend la valeur 0 en $\frac{\pi}{2}$

5.2.1 Tableaux récapitulatifs

Primitives des fonctions élémentaires

Fonction f	Une primitive de f	f Sur l'intervalle
$x \mapsto a [a \in \mathbb{R}]$	$x \mapsto ax + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^r (r \in \mathbb{Q}^*)$	$x \mapsto \frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^r} (r \in \mathbb{Q}^* - \{1\})$	$x \mapsto \frac{-1}{(r-1)x^{r-1}} + c$	$] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	$]0, \infty[$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x) + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x) + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \mapsto \tan(x) + c$	$] -\frac{\pi}{2} + k, \frac{\pi}{2} + k[(k \in \mathbb{Z})$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$x \mapsto -\cotan(x)$	$]k\pi, \pi + k\pi[(k \in \mathbb{Z})$

Opérations et Compositions

Fonction f	au'	$u' + v'$	$u'u^r$	$\frac{u'}{u^r}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$u'\cos(u)$	$u'\sin(u)$
Primitive	au	$u + v$	$\frac{1}{r+1} u^{r+1}$	$\frac{-1}{(r-1)u^{r-1}}$	$2\sqrt{u}$	$\sin(u)$	$-\cos(u)$
Condition	$a\mathbb{R}^*$	—	$r \in \mathbb{Q}$	$r \in \mathbb{Q}^* - \{1\}$, u ne s'annule pas sur K	u est strictement positive sur K	—	—

5.2.2 Autre forme de calcul de primitive

Exercice 5.2.1 ...

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : pour tout nombre réel x différent de 1, $f(x) = \frac{3x^2 - 6x + 5}{(x - 1)^2}$.

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que pour tout nombre réel $x \neq 1$, $f(x) = a + \frac{b}{(x - 1)^2}$.
2. En déduire une primitive de f sur $]1, +\infty[$.
3. Déterminer la primitive de f sur $]1, +\infty[$ prenant la valeur 8 en 3.

Solution 5.2.1 ✱

1. $a = 3$ et $b = 2$
2. $F(x) = 3x - \frac{2}{x - 1} + c$ où $c \in \mathbb{R}$
3. La primitive qui prend la valeur 8 en 3 est $F(x) = 3x - \frac{2}{x - 1}$

5.3 Exercices d'entraînement

FONCTION DÉRIVÉE

Exercice 5.3.1 ...

a est un nombre réel et f_a est la fonction définie

$$\text{par : } f_a(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + a}{x^2}$$

1. Déterminer les intervalles sur lesquels f_a est dérivable.
2. Calculer f'_a
3. Déterminer a pour que la représentation graphique de f_a ait, en son point d'abscisse -1 , une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 0$.

Exercice 5.3.2 ...

Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 12}{7x - 1}$; $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$.
2. $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$; $g(x) = \sqrt{\cos^2(x) - 1}$.
3. $f(x) = \frac{1}{(3x-8)^3}$; $g(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

Exercice 5.3.3 ...

1. Dans chacun des cas suivant, étudier les variations de la fonction f puis préciser ses extrema.
(a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$.
(b) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 9}$.
2. Pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, appliquer les inégalités des accroissements finis à fonction *sinus* sur $[0; x]$. En déduire que : pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0.85 < \sin(x) < x$.

Exercice 5.3.4 ...

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 1} \text{ avec } a \text{ et } b \text{ deux nombres réels.}$$

1. Déterminer a et b pour que la tangente (T) à la représentation graphique $\mathcal{C}$ de la fonction f , au point d'abscisse 0 , ait pour équation : $y = 3x + 2$.
2. Préciser la position de (T) par rapport à $\mathcal{C}$.

3. Étudier les variations de f .

Exercice 5.3.5 ...

1. (a) Démontrer que, pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $12x + 8 \leq (x+2)^3 \leq \frac{75x}{4} + 8$.
(b) En déduire un encadrement de $(2.01)^3$ à 10^{-3} près.
2. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ et soit r l'unique solution de l'équation $g(x) = x$ sur $]0, +\infty[$ avec $1 \leq r \leq 2$
(a) Déterminer la dérivée g' et montrer que, pour tout nombre réel de $]1, +\infty[$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
(b) En déduire que, pour tout nombre réel de $]1, +\infty[$, $|g(x) - r| \leq \frac{1}{2}|x - r|$

PRIMITIVES

Exercice 5.3.6 ...

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f :

1. $f(x) = x^3 + x^2 + 3$.
2. $f(x) = (2x - 1)^3$.
3. $f(x) = (-2x + 3)(x - 1)$.
4. $f(x) = x^4 + x^2 - 1$.
5. $f(x) = 5(2x + 1)^{14}$.
6. $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 1)^2$.

Exercice 5.3.7 ...

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives sur K de la fonction f :

1. $f(x) = (x - 1)^2$, $K = [0; +\infty[$.
2. $f(x) = \frac{1}{(x - 1)^2}$, $K =]1; +\infty[$.
3. $f(x) = \frac{1 - x^2}{x^4}$, $K =]0; +\infty[$.
4. $f(x) = \frac{1}{(2x + 1)^2}$, $K =]-\frac{1}{2}; +\infty[$

Dans le cas 1) Déterminer la primitive qui prend la valeur 0 en 2 .

Exercice 5.3.8 ...

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos^3(3x)$.
(a) Linéariser $f(x)$.
(b) En déduire la primitive F_0 de f qui prend la valeur 2 en $\frac{\pi}{3}$ après avoir déterminé l'ensemble des primitives $F(x)$.

2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{x^4 + 2x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

- Développer l'expression :
 $u(x) = (x^2 + 1)^2 + 2x.$
- En déduire a et b tels que :
 $g(x) = a + \frac{bx}{(x^2 + 1)^2}.$
- En déduire l'ensemble des primitives de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis la primitive G_0 qui prend la valeur 2 en 0.

Exercice 5.3.9 ...

On donne $f(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right).$

- Montrer que $f(x) = 4\cos^4\left(\frac{x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{x}{2}\right).$
 - Linéariser $f(x).$
- Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}.$
 - En déduire la primitive F_1 de f qui s'annule en zéro.

Exercice 5.3.10 ...

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
 $f(x) = x\cos(2x).$
 - Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}.$
 - Vérifier que $f''(x) + 4f(x) = -4\sin(2x)$ pour $x \in \mathbb{R}.$
 - Déterminer les primitives de f sur $\mathbb{R}$ et préciser celle qui s'annule en $\frac{\pi}{4}.$
- Soit g la fonction définie par
 $f(x) = \cos(x) - \frac{4}{3}\cos^3(x).$
 - Déterminer $g'(x)$ et $g''(x).$
 - Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}; g''(x) = -9g(x).$
 - En déduire les primitives de g sur $\mathbb{R}.$
 - Trouver la primitive de g sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $\frac{\pi}{6}.$

Exercice 5.3.11 ...

On se propose de déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto \sin^4(x)$ sur $\mathbb{R}.$

- Calculer $f'(x)$ et $f''(x).$
- Exprimer $f(x)$ en fonction de $f''(x)$ et de $\cos(2x).$
- En déduire l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}.$ Quelle est alors celle qui s'annule en $\frac{\pi}{2}.$

Exercice 5.3.12 ...

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ par

$$f(x) = \frac{3x + 1}{(2x + 1)^2}.$$

- Déterminer les nombres réels a et b tels que pour tout x distincts de $-\frac{1}{2},$

$$f(x) = \frac{a}{2x + 1} + \frac{b}{(2x + 1)^2}$$

- En déduire les primitives de f sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[.$
- Déterminer la primitive F de f sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ qui prend la valeur 1 en 0.

2. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x^2 - 4)e^{2x}.$$

- Déterminer les réels α, β et γ pour que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par
 $F(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^{2x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}.$
- Déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ de f qui s'annule en 0.

CHAPITRE 6

ÉTUDES DE FONCTIONS

Sommaire

6.1	Plan d'étude d'une fonction	64
6.2	Parité-Périodicité d'une fonction	65
6.2.1	Parité	65
6.2.2	Périodicité d'une fonction	65
6.3	Axe de symétrie-Centre de symétrie	66
6.4	Points particuliers	66
6.4.1	Points d'intersection	66
6.4.2	Extréma	66
6.4.3	Points d'inflexion	66
6.5	Branches infinies	67
6.5.1	Asymptotes	67
6.5.2	Direction asymptotique	67
6.6	Exemple d'étude de fonctions	68
6.7	Exercices d'entraînement	69

Objectifs pédagogiques

L'élève doit être capable de :

- ☞ Reconnaître si une fonction f est une fonction périodique de période donnée T .
- ☞ Trouver une période de la fonction $x \rightarrow f(ax + b)$, $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ où f est une des fonctions $\sin$, $\cos$ ou $\tan$.
- ☞ Étudier et représenter une fonction obtenue par composée, combinaison linéaire, produit ou quotient des fonctions introduites dans le programme.

Remarque 6.0.I

Si un paramètre apparaît dans la définition explicite, on pourra être amené à distinguer différents cas.

- ☞ Conjecture qu'un point (resp. une droite) est centre (resp. axe) de symétrie de la courbe $(\mathcal{C})$ d'une fonction définie par sa formule explicite.

- ☞ Montrer en utilisant une des caractéristiques d'un centre (resp. axe) de symétrie que ce point (resp. cette droite) est centre (resp. axe) de symétrie de la courbe.
- ☞ Démontrer que la droite d'équation $y = ax + b$ à la courbe représentative de la fonction f en utilisant la définition d'une asymptote oblique.
- ☞ Rechercher les branches infinies (direction asymptotique, branches paraboliques, asymptotes) de la courbe d'une fonction f en étudiant la limite de $\frac{f(x)}{x}$ et éventuellement $f(x) - ax$ (où a est la limite du quotient précédent) quand x tend vers l'infini.
- ☞ Déterminer éventuellement un point appartenant à toutes les courbes d'une famille de fonctions simples dépendant d'un paramètre.
- ☞ Utiliser les représentations graphiques de fonctions pour résoudre des problèmes divers : discussion et résolution d'équation $f(x) = m$, d'inéquation $f(x) > m$, recherche d'extremum sur un intervalle.

6.1 Plan d'étude d'une fonction

Pour étudier une fonction, on étudie d'abord les **variations** de cette fonction puis on la **représente** dans un repère.

- Pour étudier les variations d'une fonction, il faut :
 1. Déterminer son ensemble de définition.
 2. Déterminer son ensemble d'étude si possible à partir de la parité ou de la périodicité.
 3. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble d'étude (ou ensemble de définition).
 4. Déterminer sa dérivée puis le signe de la dérivée.
 5. Dédire les sens de variations et le tableau de variation.
- Pour représenter graphiquement une fonction, il faut chercher :
 1. les branches infinies.
 2. les droites particulières.
 3. les éléments de symétrie et les points particuliers si possible.
 4. faire peut être un tableau de valeur puis tracer la courbe de la fonction.

6.2 Parité-Périodicité d'une fonction

6.2.1 Parité

DÉFINITION 6.2.1 ❀

Soit f une fonction.

On dit que f est **paire** lorsque son ensemble de définition est symétrique par rapport à 0 et que si $x \in D_f$ alors $-x \in D_f$ et que $f(-x) = f(x)$.

- On dit que f est **impaire** lorsque son ensemble de définition est symétrique par rapport à 0 et que si $x \in D_f$ alors $-x \in D_f$ et que $f(-x) = -f(x)$.

CONSÉQUENCE 6.2.1 ❀

- Le D_f d'une fonction paire ou impaire se réduit à l'ensemble d'étude $E = D_f \cap [0, +\infty[$
- La courbe représentative d'une **fonction paire** est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- La courbe représentative d'une **fonction impaire** est symétrique par rapport à l'origine du repère.

6.2.2 Périodicité d'une fonction

DÉFINITION 6.2.2 ❀

On dit qu'une fonction est périodique de période $T \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall x \in D_f, (x + T) \in D_f \text{ et } f(x + T) = f(x)$$

CONSÉQUENCE 6.2.2 ❀

- si le pla est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et si f est périodique de période T alors la courbe de f est invariable par la translation de vecteur $(kT)\vec{i}, k \in \mathbb{Z}$.
- Pour étudier une fonction périodique de période T , il suffit de faire l'étude sur un intervalle d'amplitude T et on obtient la totalité de la courbe par la translation de vecteur $(kT)\vec{i}, k \in \mathbb{Z}$.

NB : Les fonctions $x \mapsto \sin(ax + b)$ et $x \mapsto \cos(ax + b)$ sont périodique de période $\frac{2\pi}{|a|}$ et la fonction $s \mapsto \tan(ax + b)$ a pour période $\frac{\pi}{|a|}$.

Exemple 6.2.1 ... 📖

Soit la fonction $f(x) = \cos(2x)$ définie sur $\mathbb{R}$. Etudier la parité et la périodicité de f et en déduire son ensemble de d'étude E .

6.3 Axe de symétrie-Centre de symétrie

- la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :
 - Montrer que $\forall x \in D_f, (x + a) \in D_f$ et $g : x \mapsto f(a + x)$ est paire.
 - Montrer que $\forall x \in D_f, (2a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$.
 - Montrer que $\forall a - h \in D_f, (a + h) \in D_f, f(a - h) = f(a + h)$.
- Le point $\Omega(a, b)$ est centre de symétrie si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :
 - Montrer que $\forall x \in D_f, (x + a) \in D_f$ et $g : x \mapsto f(a + x) - b$ est impaire.
 - Montrer que $\forall x \in D_f, (2a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$.
 - Montrer que $\forall a - h \in D_f, (a + h) \in D_f, f(a - h) + f(a + h) = 2b$.

Exemple 6.3.1 ...

Montrer que :

1. la droite $(\Delta) : x = 2$ est un axe de symétrie pour la courbe de $f(x) = x^2 - 4x + 7$.
2. le point $\Omega(1, 3)$ est un centre de symétrie pour la courbe de $g(x) = \frac{3x - 9}{x - 1}$

6.4 Points particuliers

6.4.1 Points d'intersection

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f une fonction.

- ♣ L'ensemble des points d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses est :

$$(\mathcal{C}_f) \cap (OI) = \{M(x, y) \in \mathcal{P} / f(x) = 0\}$$

- ♣ L'ensemble des points d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des ordonnées est :

$$(\mathcal{C}_f) \cap (OJ) = \{M(0, f(0)) \in \mathcal{P}\}$$

6.4.2 Extréma

On obtient les *extréma (maxima ou minima)* au point où la *dérivée première s'annule en changeant de signe*. C'est-à-dire :

$$M(x_0, f(x_0)) \quad / \quad f'(x_0) = 0$$

- Le point $M(x_0, f(x_0))$ est **maximum** lorsque $f''(x_0) < 0$.
- Le point $M(x_0, f(x_0))$ est **minimum** lorsque $f''(x_0) > 0$.

6.4.3 Points d'inflexion

Le point d'inflexion est le point en lequel la dérivée seconde (f'') s'annule en changeant de signe. Graphiquement, le point d'inflexion est le point où la courbe traverse sa tangente.

6.5 Branches infinies

6.5.1 Asymptotes

Soit f une fonction et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe.

Asymptote parallèle à l'un des axes

DÉFINITION 6.5.1 ❀

- Lorsque $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = l$, on dit que la droite $(\mathcal{D}) : y = l$ est une asymptote horizontale à $(\mathcal{C}_f)$.
- Lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, on dit que la droite $(\mathcal{D}) : x = x_0$ est une asymptote verticale à $(\mathcal{C}_f)$.

Remarque 6.5.I

Une courbe et son asymptote peuvent se couper.

Asymptote oblique

Soit a, b des réels. Lorsque

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

on dit que la droite $(\mathcal{D}) : y = ax + b$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice 6.5.1 ...

Soit $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$.

1. Déterminer les réels a, b et c pour que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$.
2. Démontrer que la droite $(\mathcal{D}) : y = ax + b$ est une asymptote oblique.
3. Étudier la position relative de la courbe avec la droite $(\mathcal{D})$

NB : D'une manière générale, les courbes de deux fonctions f et g sont asymptotes l'une de l'autre si

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$$

6.5.2 Direction asymptotique

On étudiera les directions asymptotiques dans le cas où

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

On calcule dans ce cas :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = b$$

Puis on utilise le tableau suivant :

$a = \pm\infty$	$(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe $(O, \vec{i})$	
$a = 0$	$(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe $(O, \vec{j})$	
$a \in \mathbb{R}^*$	$b \in \mathbb{R}$,	$(\mathcal{C}_f)$ admet la droite d'équation $y = ax + b$ comme asymptote oblique
	b n'existe pas	$(\mathcal{C}_f)$ admet une direction asymptotique d'équation : $y = ax$
	$b = \infty$	$(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction la droite : $y = ax$
a n'existe pas	Ni asymptote, ni branche parabolique, ni direction asymptotique.	

Exemple 6.5.1 ... 

Soit $f(x) = \sqrt{x}$. Étudier les branches infinies de f .

6.6 Exemple d'étude de fonctions

Étudier et tracer les fonction suivantes :

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 1 \quad h(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} \quad g(x) = \frac{x^3}{x^2 - x - 2}$$

6.7 Exercices d'entraînement

Problème 6.7.1 ...

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = \sqrt{\frac{3-x}{1+x}}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

PARTIE A

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Étudier la limite de $\frac{f(x)}{x-3}$ quand x tend vers 3 à gauche. Interpréter graphiquement ce résultat.
- Étudier les variations de f (limites, dérivée, sens de variation et tableau de variation).
- (a) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $x = 2$.
(b) Déterminer l'intersection de $(\mathcal{C})$ avec (T) .
(c) Préciser la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (T) .
- Construire $(\mathcal{C})$.

PARTIE B

- Montrer que f est une bijection de l'ensemble de définition de f vers un intervalle J à préciser.
- Soit f^{-1} la bijection réciproque de f . Calculer les valeurs de f^{-1} puis de $(f^{-1})'$ en 1 et en $\sqrt{3}$.
- Construire la courbe $(\mathcal{C}')$ représentative de f^{-1} dans le repère initial.
- Soit (Γ) la courbe d'équation $x(y^2 + 1) + y^2 - 3 = 0$
(a) Expliquer comment (Γ) s'obtient à partir de $(\mathcal{C})$.
(b) Construire (Γ) dans le repère précédent.

Problème 6.7.2 ...

PARTIE A

Soit la fonction numérique f_m définie par $f_m(x) = \sqrt{x^2 + 2mx + 4} - x$. On désigne par $(\mathcal{C}_m)$ sa courbe dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f_m suivant les valeurs de m .

- Montrer que toutes les courbes $(\mathcal{C}_m)$ passent par un point fixe que l'on déterminera.

PARTIE B

Dans cette partie on suppose $m = 0$ et on pose : $f(x) = f_0(x)$, $(\mathcal{C}) = (\mathcal{C}_0)$.

- (a) Montrer que pour tout nombre réel x , $\sqrt{x^2 + 4} > |x|$.
(b) En déduire le signe de $x - \sqrt{x^2 + 4}$ sur $\mathbb{R}$.
- (a) Calculer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
(b) Calculer la limite de f en $-\infty$.
- (a) Calculer $f'(x)$ et en déduire son signe à partir des résultats de 1.-b).
(b) Étudier le sens de variation de f , puis dresser son tableau de variation.
- (a) Donner une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse O .
(b) Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C})$.
(c) Construire $(\mathcal{C})$, (T) et les asymptotes de $(\mathcal{C})$.

PARTIE C

- Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle que l'on précisera.
- Soit f^{-1} la bijection réciproque de f et (Γ) sa courbe représentative.
(a) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} .
(b) Étudier le sens de variation de f^{-1} , puis dresser son tableau de variation.
- Comment s'obtient (Γ) à partir de $(\mathcal{C})$? Construire (Γ) dans le même repère que $(\mathcal{C})$.
- Définir explicitement f^{-1} .

Problème 6.7.3 ...

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f la fonction définie par : $f(x) = (x-2)\sqrt{4-x^2}$. On désigne par $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

- (a) Déterminer l'ensemble de définition de f .
(b) Étudier la dérivabilité de f en -2 et en 2 .
(c) En déduire la nature des tangentes aux points d'abscisse -2 et 2 .
- Étudier la nature les variations de f .
- Soit h la fonction définie par $h(x) = f(x) + 4$

- (a) Étudier les variations de h .
- (b) Dédire de la question 3(a) que l'équation $f(x) = -4$ admet exactement deux solutions α et β ($\alpha < \beta$). Déterminer β puis donner un encadrement de α à 10^{-1} près.
4. Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
5. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[-1, 2]$.
- (a) Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} sur un intervalle J à préciser.
- (b) Préciser l'ensemble de dérivabilité de g^{-1} .
- (c) Soit $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ la courbe de g^{-1} . Donner une équation de la tangente à $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ au point d'abscisse -4 .
- (d) Tracer $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère que $(\mathcal{C}_f)$.

Problème 6.7.4 ...

Soit la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}$$

- (a) Étudier la parité de f .
- (b) Peut-on choisir un ensemble d'étude pour f ?
Si oui préciser cet ensemble.
- (a) Étudier la dérivabilité de f en 1.
- (b) Donner l'ensemble de sur lequel f est dérivable.
- (a) Étudier les variations de f' et tracer $\mathcal{C}_f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- (b) En déduire l'ensemble Γ des points M du plan qui vérifient $y^2 = |x^2 - 1|$ et construire Γ .

Problème 6.7.5 ...

Soit f la fonction numérique définie par

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{|x^2 - 1|}}{x}$$

- Étudier la parité de f et en déduire l'intervalle d'étude pour f .
- Étudier la dérivabilité de f en 1 et déterminer la dérivée de f sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.
- Quelle est le signe de $f'(x)$ (On peut poser si nécessaire $u = \sqrt{x^2 - 1}$

- (a) $\forall x \in [1, +\infty[$, mettre sous forme :
 $f(x) = \frac{x}{2} - 1 + g(x)$ où $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.
 - (b) En déduire une équation d'une asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f .
5. Construire $(\mathcal{C}_f)$.

Problème 4

Partie A

Soit le nombre complexe $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. $M(x, y)$ le point image du nombre complexe z dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. À tout point complexe d'affixe $x \neq -2$, on associe le nombre complexe : $Z = \frac{iz^2}{z+2}$.

- Écrire Z sous forme algébrique.
- Déterminer et représenter l'ensemble (Δ) des points M du plan tels que Z soit imaginaire pur.

Partie B

On se propose de représenter l'ensemble (F) des points du plan tels que Z soit réel.

- Exprimer y en fonction de x .
- On considère la fonction numérique définie par $f(x) = |x| \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}$.
 - Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f .
 - Étudier la dérivabilité de f en -2 et en 0 .
 - Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
 - Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction de f .
- En déduire le tracé de l'ensemble (F) .

Partie C

Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]0; 2[$.

- Démontrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
- Soit g^{-1} la bijection de g .
 - g^{-1} est-elle dérivable sur J ?
 - Calculer $(g^{-1})'(\sqrt{3})$.

Problème 6.7.6 ...

Soit f une fonction définie sur $]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$ par

$$f(x) = \frac{1}{1 - \sin(2x)}$$

et $(\mathcal{C})$ sa courbe dans le plan muni de repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Démontrer que f est dérivable sur $]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$ et

$$\forall x \in]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]; \quad f'(x) = \frac{2 \cos(2x)}{(1 - \sin(2x))^2}.$$
- Étudier les variations de f .

- 3.) a./ Démontrer que f réalise une bijection de $\left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- b./ Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} .
- c./ Calculer $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $(f^{-1})'\left(\frac{2}{2-\sqrt{3}}\right)$.
- 4.) a./ Démontrer que pour tout réel $a : 1 - \sin(a) = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)$.
- b./ Vérifier que la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{2 \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$ est une primitive de f sur $\left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right]$.

Problème 6.7.7 ...

- A./ Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) . On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = -2x + \sqrt{x^2 + 1}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.
- 1.) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}; x - 2\sqrt{x^2 + 1} < 0$.
 - 2.) a./ Étudier la dérivabilité de f sur son ensemble de définition D_f .
 - b./ Déterminer $f'(x)$ pour tout x élément de D_f .
 - c./ Dresser le tableau de variation de f .
 - 3.) Étudier les branches infinies de $((\mathcal{C}))$.
 - 4.) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec l'axe des abscisses.
 - 5.) Tracer $(\mathcal{C})$ ainsi que ses branches infinies.
- B./ 1.) a./ Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} .
- b./ Résoudre l'équation $f(x) = 1$.
- c./ Calculer $(f^{-1})'(1)$.
- d./ En déduire une équation de la tangente (T) à la courbe $((\mathcal{C}))'$ de f^{-1} au point d'abscisse 1.
- 2.) Tracer $((\mathcal{C}))'$ et ses asymptotes dans le même repère que $((\mathcal{C}))$.
- C./ On considère la fonction h définie par $h(x) = 2|x| + \sqrt{x^2 + 1}$.
- 1.) Étudier la parité de h . et en déduire comment on obtient la courbe $((\mathcal{C}))_h$ de h à partir de $((\mathcal{C}))$?
 - 2.) Tracer $((\mathcal{C}))_h$ dans le même repère que $((\mathcal{C}))$.

CHAPITRE 7

FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Sommaire

7.1 Définitions et Propriétés	73
7.1.1 Ensemble de définition de $\ln(f(x))$ et $\ln(f(x))$	73
7.1.2 Variation de $\ln$ et conséquences	73
7.1.3 Propriétés algébriques de $\ln$	74
7.1.4 Équations comportant $\ln$	74
7.1.5 Inéquations comportant $\ln$	74
7.2 Dérivée-Primitive-limites	75
7.2.1 Variation et représentation graphique de $\ln$	75
7.2.2 Limites remarquables	76
7.2.3 Dérivée de $\ln(f(x))$ et $\ln(f(x))$	76
7.2.4 Primitives	76
7.3 Fonction logarithme de base a	77
7.4 Exercices d'entraînement	78

Objectifs pédagogiques

L'élève doit être capable de :

- ☞ Résoudre des équations ou inéquations faisant intervenir les fonctions **ln**.
- ☞ Étudier et représenter graphiquement les fonction dont la formule explicite s'écrit à l'aide la fonction **ln**.
- ☞ Trouver la dérivée des fonction **ln of** (resp. **ln o|f|**) où **f** est une fonction numérique dérivable sur leurs ensembles de définition.
- ☞ Utiliser les logarithmes décimaux dans les calculs numériques pour résoudre des problèmes concrets ou des problèmes relatifs à d'autres disciplines.

7.1 Définitions et Propriétés

DÉFINITION 7.1.1 ✿

On appelle fonction logarithme Népérien, la primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction qui à $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1. Elle est notée **ln** et est définie par :

$$\begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$$

DÉFINITION 7.1.2 ✿

- L'ensemble de définition de **ln** est : $]0, +\infty[$.
- $\ln(1) = 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, (\ln(x))' = \frac{1}{x}$

7.1.1 Ensemble de définition de $\ln(f(x))$ et $\ln(|f(x)|)$

- Soit $g(x) = \ln(f(x))$, on a :

$$D_g = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ et } f(x) > 0\}$$

- Soit $g(x) = \ln(|f(x)|)$, on a :

$$D_g = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ et } f(x) \neq 0\}$$

Exemple 7.1.1 ... ✍

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln(9 - x^2) \quad g(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \quad h(x) = \ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| \quad k(x) = \ln(x) - \ln(x-1)$$

Solution 7.1.1 ✿

$$D_f =]-3, 3[\quad D_g =]-1, 1[\quad D_h = \mathbb{R} - \{-1, 1\} \quad D_k =]1, +\infty[.$$

7.1.2 Variation de $\ln$ et conséquences

On a : $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$. $\forall x \in]0, +\infty[, \frac{1}{x} > 0$ et donc $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
Donc $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{array}{l} \ln(a) = \ln(b) \iff a = b \\ \ln(a) < \ln(b) \iff a < b \end{array}$$

Cas particuliers ($a \in]0, \infty[$)

- Si $a < 1 \iff \ln(a) < \ln(1) \iff \ln(a) < 0$
- Si $a > 1 \iff \ln(a) > \ln(1) \iff \ln(a) > 0$

D'où

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, 1[, \ln(x) < 0 \\ \forall]1, +\infty[, \ln(x) > 0 \end{aligned}$$

NB : Il existe un unique nombre réel strictement positif noté e tel que $2 < e < 3$ et $\ln(e) = 1$ avec $e \simeq 2.718$.

7.1.3 Propriétés algébriques de $\ln$

Soit a, b deux nombres réels strictement positifs ($]0, +\infty[$) et $r \in \mathbb{Q}$. On a :

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad \left| \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)\right.$$

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) \quad \left| \quad \ln(a^r) = r\ln(a) \quad \left| \quad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)\right.\right.$$

Exemple 7.1.2 ... 

Simplifier l'expression : $A = \ln(\sqrt{2} - 1)^{10} + \ln(1 + \sqrt{2})^{11}$

Solution 7.1.2 ✱

$$A = \ln(\sqrt{2} + 1)$$

7.1.4 Équations comportant $\ln$

ACTIVITÉ 7.1.1

Résoudre dans $\mathbb{R}$

1. $\ln(x - 3) = 1$
2. $\ln(-2x + 4) = \ln(x + 4)$
3. $\ln(2x - 3) + 2\ln(x + 1) = \ln(6x - 3)$
4. $\ln(x - 1) - \ln(3 - x) = 1$

Solution 7.1.3 ✱

1. $D_V =]3, +\infty[$ et $S = \{e + 3\}$
2. $D_V =]-4, 2[$ et $S = \{0\}$
3. $D_V =]\frac{3}{2}, +\infty[$ et $S = \{2\}$
4. $D_V =]1, 3[$ et $S = \{\frac{3e+1}{e+1}\}$

7.1.5 Inéquations comportant $\ln$

ACTIVITÉ 7.1.2

Résoudre dans $\mathbb{R}$

1. $\ln(-x + 2) > \ln(x + 3)$
2. $\ln(x - 1) - \ln(x) \leq 0$

Solution 7.1.4 ✱

1. $D_V =]-3, 2[$ et $S =]-3, -\frac{1}{2}[$
2. $D_V =]1, +\infty[$ et $]1, +\infty[$

7.2 Dérivée-Primitive-limites

7.2.1 Variation et représentation graphique de $\ln$

Soit $f(x) = \ln(x)$. On a : $D_f =]0, +\infty[$.

— Limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$$

— Dérivée

$\forall x \in]0, +\infty[$, f est dérivable en x et $f'(x) = \frac{1}{x}$. Ainsi $\forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) > 0$ D'où f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

— Tableau de variation

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$			+	
$f(x)$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

— Branches infinies

— On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Donc $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) .

— $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$. Donc la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale

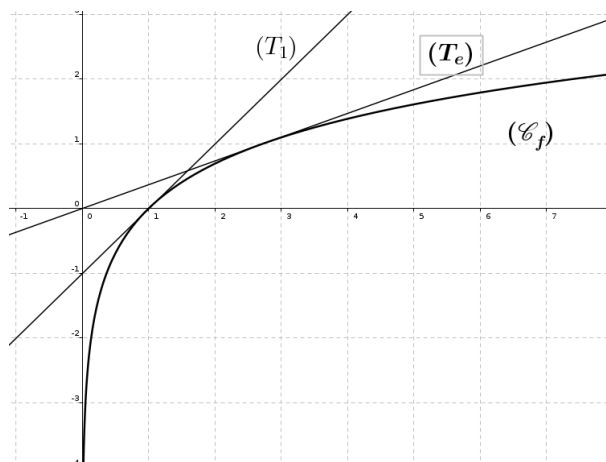
à $\mathcal{C}_f$.

— Tangente en $x_0 = 1$ et $x_0 = e$

— $(T_1) : y = f'(1)(x - 1) + f(1) \Rightarrow y = x - 1$ car $f'(1) = 1$ et $f(1) = 0$.

— $(T_e) : y = f'(e)(x - e) + f(e) \Rightarrow y = \frac{1}{e}x$ car $f'(e) = \frac{1}{e}$ et $f(e) = 1$.

— Courbe



7.2.2 Limites remarquables

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$
$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^\alpha \ln(x) = 0, \alpha > 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0, \alpha > 0$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

Exemple 7.2.1 ... 

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \ln(x)}{1 - \ln(x)} = -1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} = 0$$

7.2.3 Dérivée de $\ln(f(x))$ et $\ln(|f(x)|)$

Soit f une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle K sur lequel elle ne s'annule pas. On a :

$$[\ln(f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{et} \quad [\ln(|f(x)|)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Exemple 7.2.2 ... 

Soit $f(x) = \ln(x^2 + 3x - 1)$ $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$. On a :

$$f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x-1} \quad g'(x) = \frac{-2}{(x-1)(x+1)}$$

7.2.4 Primitives

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K sur lequel elle ne s'annule pas. La fonction $\frac{f'(x)}{f(x)}$ admet une primitive sur K noté $F(x) = \ln|f(x)| + c$

Exemple 7.2.3 ... 

Les primitives des fonctions $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+3}$ et $g(x) = \frac{1}{(x+3)(x-1)}$ sont respectivement $F(x) = \ln|x^2-x+3| + c$ et $G(x) = \frac{1}{4}\ln|x+3| + \frac{1}{4}\ln|x-1| + c$

7.3 Fonction logarithme de base a

Soit a un réel supérieur à 0 et différent de 1. On appelle *fonction logarithme de base a* notée $\log_a$, la fonction définie par :

$$\begin{array}{ll}]0, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{array}$$

Exemple 7.3.1 ... 

Si $a = 10$ alors $\log_{10}$ est appelé *logarithme décimal*. Ainsi, on a :

$$\begin{array}{ll} \log_{10} :]0, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{array}$$

7.4 Exercices d'entraînement

FONCTIONS LOGARITHMES

Problème 7.4.1 ...

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la fonction g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln(x)$.

- Étudier les variations de g , puis déduire le signe de $g(x)$ sur son ensemble de définition.
- On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{\ln(x)}{x}$.
 - Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
 - Déterminer la dérivée f' de la fonction f .
 - Exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$, puis en déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
- Étudier les branches infinies à la courbe $(\mathcal{C})$ de f .
- En utilisant la question 1), montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ de f reste en-dessous de la droite d'équation $y = x$.
- Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ coupe l'axe des abscisses en un unique point dont l'abscisse α vérifie $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.
 - Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès.
- Déterminer les coordonnées du point A intersection de $(\mathcal{C})$ avec la droite d'équation : $y = \frac{x}{2}$.
 - Écrire une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ en A .
 - Déterminer un point B de $(\mathcal{C})$ où la tangente à $(\mathcal{C})$ est parallèle à la droite d'équation : $y = \frac{x}{2}$.
- A l'aide de tout ce qui précède, construire la courbe $(\mathcal{C})$ ainsi que la droite d'équation : $y = \frac{x}{2}$.
- Montrer que la fonction f admet une bijection réciproque f^{-1} .
 - Construire la courbe $(\mathcal{C}')$ de f^{-1} dans le même repère que $(\mathcal{C})$.
- Déterminer la primitive F de f qui s'annule en 1.

Problème 7.4.2 ...

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (Unité : 2cm). On considère les fonctions g et h définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x^2 + x + 2\ln(x+1)}{x+1}$;

$$h(x) = (x+1)^2 + 2 - 2\ln(x+1).$$

- Calculer $h'(x)$. En déduire que h admet un minimum. Quel est le signe de $h(x)$.
 - Étudier la variation de g . On remarquera que sur $] -1, +\infty[$, $g'(x)$ a le signe de $h(x)$.
 - Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ représentative de g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à (D) .
 - Déterminer la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ en O .
 - Démontrer qu'il existe un unique point A de $(\mathcal{C})$ où $(\mathcal{C})$ admet une tangente (T') parallèle à (D) . Déterminer les coordonnées de A .
 - Construire $(\mathcal{C})$, (D) , (T) et (T') .
- Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation $g(x) = x + m$. Placer ces solutions par rapport à 0 et e^{-1} .
- Justifier que g est une bijection de $] -1; +\infty[$ sur l'intervalle J que l'on précisera. En déduire que g admet une bijection réciproque g^{-1} .
 - Tracer dans le même repère la courbe (Γ) représentative de g^{-1} .
- Définir une primitive sur $] -1; +\infty[$ de la fonction f définie pour tout $x \in] -1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{1+x} \ln(x+1)$.
 - En déduire une primitive de g sur $] -1; +\infty[$ qui s'annule en e^{-1} .

Problème 7.4.3 ...

On considère l'application

$$f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1 + 2\ln(x)}{x^2} \quad \text{et la fonction}$$

$\varphi :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \frac{1}{x}$. On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_\varphi)$ les courbes représentatives de f et φ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

- Étudier le sens de variation de f .
- Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et préciser les asymptotes à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
 - Étudier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à l'axe des abscisses et donner une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.
- Dresser le tableau de variation de f .
 - Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et (T) , dans le même repère. (Unité graphique : 4cm)

Partie B

- Démontrer que la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_\varphi)$ peut se déduire du signe de :
 $g(x) = (1 + 2\ln(x)) - x$
 - En utilisant les variations de g , prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans chacun des intervalles $]0, 2[$ et $]2; +\infty[$.
On note α la solution appartenant à $]2; +\infty[$, vérifier que $3 < \alpha < 4$.
 - Étudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
 - En conclure sur la position de $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_\varphi)$.
- Soit h la fonction définie par $h(x) = 1 + 2\ln(x)$.
 - Vérifier que les équations $g(x) = 0$ et $h(x) = x$ sont équivalentes.
 - Donner le sens de variation de h .
Montrer que l'on a :
 $x' < h(x') < \alpha < h(x'') < x''$.
- Vérifier que pour tout $x \in [3; 4]$ on a
 $0 < h'(x) \leq \frac{2}{3}$ puis que $|h'(x)| \leq \frac{2}{3}$
 - Montrer que pour tout $x \in [3; 4], h(x) \in [3; 4]$.
 - Montrer à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que :
 $|h'(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3}|x - \alpha|$.

- Tracer $(\mathcal{C}_\varphi)$ sur le même graphique que $(\mathcal{C}_f)$.

Problème 7.4.4 ...

Partie A

Soit f la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1+x)$. On note par $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (Unité graphique 2 cm).

- Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
 - Étudier les variations de f sur $] -1; +\infty[$, puis dresser le tableau de variations.
 - Préciser le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x dans $] -1; +\infty[$.
- On veut étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et de la courbe $(\mathcal{P})$ d'équation : $y = \frac{1}{2}x^2$.
Pour cela, introduisons la fonction g définie sur $] -1; +\infty[$ par
 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$.
 - Étudier les variations de g .
 - Déduire le signe de $g(x)$.
 - Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et de $(\mathcal{P})$.
- Tracer les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{P})$ dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- Soit λ un nombre strictement supérieur à -1 et inférieur ou égal à 0 . ($-1 < \lambda \leq 0$).
On note E_λ l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan, $\lambda \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq f(x)$.
 - Hachurer E_λ sur le dessin.
 - À l'aide d'une intégration par partie et en remarquant que $f'(x) = \frac{x}{x+1}$,
Calculer $\int_\lambda^0 \ln(1+x) dx$.
 - Calculer en cm^2 , l'aire de E_λ .

Partie B

Dans cette partie on étudie la suite (U_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$U_n = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

- Déterminer la limite de la suite (U_n) .
- En utilisant la partie A, montrer que pour tout entier $n \geq 1, 0 \leq U_n \leq \frac{1}{2n^2}$.
- Déduire un entier n_0 et que $\forall n \geq n_0$ on ait :
 $U_n \leq 10^{-10}$.

Problème 7.4.5 ...

f_n est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f_n(x) = x - n - \frac{n \ln(x)}{x}$ où $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $(\mathcal{C}_{f_n})$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$: (Unité graphique 2cm).

1. Soit pour tout n , la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par
 $g_n(x) = x^2 - n + n \ln(x)$.
 - (a) Déterminer l'ensemble de définition D_{g_n} de g_n puis calculer les limites aux bornes.
 - (b) Étudier le sens de variation de g_n puis dresser son tableau de variation.
 - (c) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution notée α_n et que $\alpha_n \in [1; 3]$ puis déduire le signe de $g_n(x)$.
2.
 - (a) Déterminer l'ensemble de définition (D_{f_n}) de f_n puis calculer les limites aux bornes.
 - (b) Exprimer $f'_n(x)$ en fonction de $g_n(x)$ puis en déduire le sens de variation de f_n .
Dresser le tableau de variation.
 - (c) Montrer que la droite $(D_n) : y = x - n$ est asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ à $(\mathcal{C}_{f_n})$.
 - (d) α_n étant le nombre déterminé en A-3), Montrer que $\alpha_1 = 1$ et $1, 2 < \alpha_2 < 1, 3$.
 - (e) Dresser le tableau de variation de f_1 et de f_2 .
 - (f) Représenter dans le même repère (D_1) ; (D_2) ; $(\mathcal{C}_{f_1})$ et $(\mathcal{C}_{f_2})$.
 - (g) Calculer l'aire S_1 de la partie du plan comprise en $(\mathcal{C}_{f_1})$ et les droites d'équation $x = 1$, $x = e$ et $y = 0$.
3. On pose $U(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x)$
 - (a) Calculer la limite de $U(x)$ lorsque x tend vers 0 à droite et en $+\infty$.
 - (b) Étudier les variations de U puis dresser son tableau de variation.
 - (c) Montrer que l'équation $U(x) = 0$ admet une solution unique β tel que $\beta \in]0; 1[$.
 - (d)
 - i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $f_n(\beta) = \beta$.

- ii. Déduire alors que toutes les courbes $(\mathcal{C}_{f_n})$ passent par un point fixe B .
- iii. Donner la position relative de $(\mathcal{C}_{f_{n+1}})$ par rapport à $(\mathcal{C}_{f_n})$.

Problème 7.4.6 ...

Partie A :

1. Soit la fonction Q définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $Q(x) = 3x^3 - x - 2$.
Factoriser $Q(x)$ sachant que 1 est un zéro de $Q(x)$ puis étudier le signe de $Q(x)$ suivant les valeurs de x .
2. Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^3 - x + 1 - 2 \ln(x)$.
 - (a) Après une profonde respiration, déterminer la fonction dérivée g' de g .
 - (b) En utilisant, avec une sagesse exceptionnelle, la question 1./, donner le sens de variation de g .

Partie B : Soit f , la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + 1 + \frac{x + \ln(x)}{x^2}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe (unité 2cm).

1. Calculer la limite de $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln(x)}{x^2} = 0$; en déduire la limite de f en $+\infty$.
2. Justifier que les droites (D) et (Δ) d'équations respectives $x = 0$ et $y = x + 1$ sont asymptotes à $(\mathcal{C})$.
3. Avec une forte précision, déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1.
4.
 - (a) Étudier les variations de la fonction h telle que $h(x) = x + \ln(x)$ sur $]0; +\infty[$.
 - (b) En déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution α vérifiant $0.56 < \alpha < 0.57$.
5. Après une profonde respiration, étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ avec (Δ) .
6.
 - (a) Durant une forte attention, étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation
 - (b) En déduire délicatement l'existence d'un nombre réel unique $\beta \in]0.46; 0.47[$ tel que $f(\beta) = 0$.
 - (c) Construire la très belle courbe $(\mathcal{C})$; la droite (Δ) et la tangente (T) .

Problème 7.4.7 ...

A. On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie par :

$$\frac{x-1}{2x-3} + \ln|x-2|.$$

1. Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
2. Dédire des variations de g que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement trois solutions α, β, γ .
3. a./ Calculer $g(1)$ et vérifier que $\frac{7}{4} < \beta < \frac{15}{8}$ et $\frac{19}{8} < \gamma < \frac{5}{2}$.
b./ En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x appartenant à son domaine de définition.

B. Soit la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(2) = 0. \\ f(x) = (x-1)(x-2) \ln|x-2| \quad \text{si } x \neq 2 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 2$.
Interpréter graphiquement le résultat. (0.25 pt)
2. a./ Déterminer l'ensemble de dérivabilité D' de f ;
b./ Calculer $f'(x)$ sur D' et montrer que si $x \neq \frac{3}{2}$ alors $f'(x) = (2x-3)g(x)$.
c./ En déduire le signe de $f'(x), \forall x \in D'$.
3. Acheter l'étude des variations de f puis dresser son tableau de variation.
4. Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 4 cm, construire avec soin la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f .

C. On considère la fonction F définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

- (a) Montrer que F est bien définie et est continue sur $\mathbb{R}$.
- (b) a./ Déterminer la primitive H de la fonction $x \mapsto x^2 - 3x + 2$ qui s'annule pour $x = 0$.
b./ Déterminer les réels a, b, c et d tels que $\forall x \in \mathbb{R}$,
 $H(x) = (ax^2 + bx + c)(x-2) + d$.
- (c) À l'aide d'une intégration par partie, calculer $F(x)$ pour $x > 2$.
- (d) Quelle est la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers 2. En déduire $F(2)$.

- (e) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la portion du plan comprise entre la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.

CHAPITRE 8

FONCTIONS EXPONENTIELLES ET PUISSANCES

Sommaire

8.1	Fonction exponentielle	83
8.1.1	Définition et conséquences	83
8.2	Équations et Inéquations	83
8.3	Limites - Dérivée - Primitives	84
8.3.1	Limites remarquables	84
8.3.2	Dérivée de $\exp(U(x))$	84
8.3.3	Primitive	84
8.4	Étude de la fonction $x \mapsto e^x$	85
8.5	Fonction exponentielle de base a	86
8.5.1	Proposition	86
8.5.2	Étude de la fonction $x \mapsto a^x, a > 0$	86
8.6	Fonction puissance	88
8.6.1	Étude de la fonction $g_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$	88
8.7	Exercices d'entraînement	89

Objectifs pédagogiques

L'élève doit être capable de :

- ☞ Résoudre des équations ou inéquations faisant intervenir les fonctions **exp**.
- ☞ Trouver la dérivée des fonction **exp of** où **f** est une fonction numérique dérivable sur leurs ensembles de définition.
- ☞ Étudier et représenter graphiquement les fonction dont la formule explicite s'écrit à l'aide la fonction **exp**.
- ☞ Retrouver la dérivée de la fonction exponentielle de base **a** à partir de la définition puis retrouver ses limites, son sens de variation et l'allure suivant les valeurs de **a** de sa représentation graphique.
- ☞ Déterminer suivant les valeurs de **α**, les limites de la fonction puissance **α** et l'allure de sa représentation graphique.
- ☞ Étudier les fonctions du type $x \mapsto [u(x)]^{u(x)}$.

8.1 Fonction exponentielle

8.1.1 Définition et conséquences

DÉFINITION 8.1.1 ✿

On appelle fonction exponentielle, la fonction réciproque de la fonction $\ln$. On la note $\exp$ et est définie par :

$$\begin{aligned}\exp : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \exp(x)\end{aligned}$$

N.B : On note aussi $\exp(x) = e^x$.

CONSÉQUENCE 8.1.1 ✿

Soit $f(x) = e^x$. On a :

♣ $D_f = \mathbb{R}$.

♣ $\exp(0) = 1$.

♣ $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.

Propriété 8.1.1 ✿

Soit a, b deux nombres réels $(]0, +\infty[)$ et $r \in \mathbb{Q}$. On a :

$$e^a \times e^b = e^{a+b} \quad \left| \quad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \quad \left| \quad \frac{1}{e^a} = e^{-a} \quad \left| \quad \left(e^a\right)^r = e^{ar} \quad \left| \quad e^{\ln(a)} = a \quad \left| \quad e^1 = e\right.\right.\right.$$

On a aussi :

♣ $e^a = e^b \iff a = b$.

♣ $e^a > e^b \iff a > b$.

Exemple 8.1.1 ... ✍

Simplifier les écritures $A = e^{1-\ln(5)}$ et $B = \frac{e^{1+\ln(2)}}{e^{2+\ln(3)}}$.

Solution 8.1.1 ✿
 $A = \frac{e}{5}$ et $B = \frac{e}{3e}$.

8.2 Équations et Inéquations

ACTIVITÉ 8.2.1

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations et inéquations suivantes :

1. $e^{x-3} = 1$.

2. $3e^x - 7e^{-x} + 20 = 0$.

3. $\left(\ln(x)\right)^2 - \ln(x) - 2 = 0$.

4. $e^{2x} - 5e^x \geq 6$.

5. $\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} > 2$.

Solution 8.2.1 ✱

1. $S = \{3\}$.

2. $S = \{\ln(\frac{1}{3})\}$.

3. $S = \{e^2; \frac{1}{e}\}$.

4. $S = [\ln(6); +\infty[$.

5. $S =]0; \frac{\ln(2)}{2}[$.

8.3 Limites - Dérivée - Primitives

8.3.1 Limites remarquables

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty, \forall \alpha > 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha e^x = 0, \forall \alpha > 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1} = e$

Exemple 8.3.1 ... 

Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x - 3}$.

8.3.2 Dérivée de $\exp(U(x))$

Soit $f(x) = e^{U(x)}$. Si U est dérivable sur K alors $f(x)$ l'est aussi sur K et on obtient :

$$f'(x) = U'(x)e^{U(x)}$$

Exemple 8.3.2 ... 

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x) = e^{2x-1} \quad ; \quad g(x) = e^{\frac{x-2}{x+2}} \quad ; \quad h(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}.$$

Solution 8.3.1 ✱

$$f'(x) = 2e^{2x-1} \quad ; \quad g'(x) = \frac{4}{(x+2)^2} e^{\frac{x-2}{x+2}} \quad ; \quad h'(x) = \left(\frac{-1-x}{x^2} \right) e^{\frac{1}{x}}.$$

8.3.3 Primitive

Soit U une fonction continue et dérivable sur l'intervalle K . Une primitive de la fonction $x \mapsto U'(x)e^{U(x)}$ est la fonction $x \mapsto e^{U(x)} + c, c \in \mathbb{R}$ sur l'intervalle K .

Exemple 8.3.3 ...

Déterminer la primitive des fonctions suivantes : $f(x) = 2e^{3x-1}$ et $g(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

Solution 8.3.2 ✱

$$F(x) = \frac{2}{3}e^{3x-1} + c \text{ et } G(x) = -e^{\frac{1}{x}} + c.$$

8.4 Étude de la fonction $x \mapsto e^x$

Soit $f(x) = e^x$. On a $D_f = \mathbb{R}$.

♣ Les limites :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

♣ Les branches infinies. On a :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ donc la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ donc la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ) en $+\infty$.

♣ Dérivée-Sens de variation et Tableau de variation :

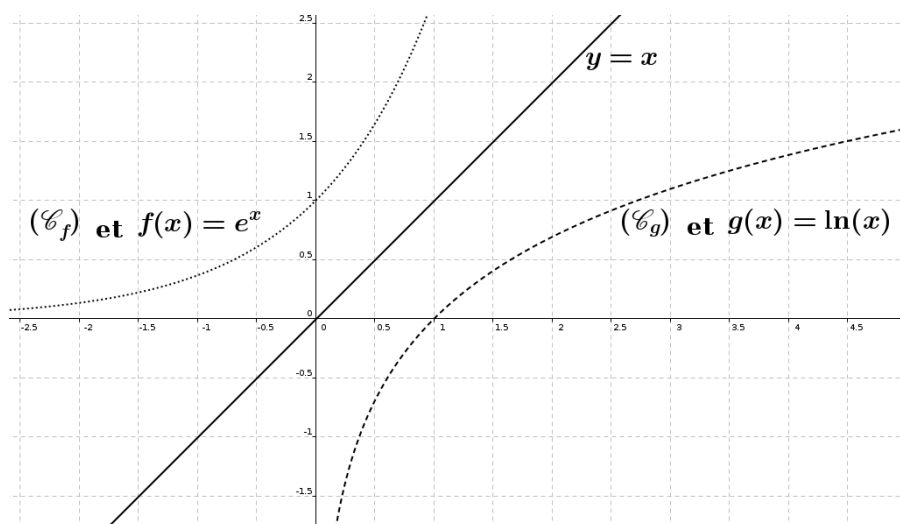
On a : $f'(x) = e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Ainsi la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on obtient :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$			+	
$f(x)$	0	1	e	$+\infty$

♣ Equation des tangentes aux points $A(0; 1)$ et $B(1; e)$:

$$\begin{aligned} (T_A) : y &= f'(0)(x - 0) + f(0) & (T_B) : y &= f'(1)(x - 1) + f(1) \\ &= 1 \times (x - 0) + 1 & &= e \times (x - 1) + e \\ &= x + 1. & &= ex. \end{aligned}$$

♣ Courbe :



8.5 Fonction exponentielle de base a

DÉFINITION 8.5.1 ❀

Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1. On appelle fonction exponentielle de base a , l'application :

$$\begin{aligned} \exp_a : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto a^x \end{aligned}$$

Ainsi : $\exp_a(x) = a^x = e^{x \ln(a)}$.

8.5.1 Proposition

- ♣ $\forall \alpha, \beta$; si $0 < a < 1$ alors $\alpha < \beta \iff a^\alpha > a^\beta$.
- ♣ $\forall \alpha, \beta$; si $a > 1$ alors $\alpha < \beta \iff a^\alpha < a^\beta$.
- ♣ $\forall \alpha, \beta, a$; $\alpha = \beta \iff a^\alpha = a^\beta$.

Propriété 8.5.1 ❀

Soient a un nombre réel strictement positif et x, y des réels, on a :

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad \left| \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad \left| \quad (a^x)^y = a^{xy} \right. \right.$$

8.5.2 Étude de la fonction $x \mapsto a^x, a > 0$

Soit $f(x) = a^x$, on a : $f(x) = e^{x \ln(a)}$ et $D_f = \mathbb{R}$.

♣ Les limites :

$$- \forall a \in]0; 1[, \ln(a) < 0 \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln(a)} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

— $\forall a \in]1; +\infty[, \ln(a) > 0 \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln(a)} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

♣ Dérivées-Sens de variation :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'(x) = \ln(a)e^{x \ln(a)}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{x \ln(a)} > 0$ donc le signe de f' est celui de $\ln(a)$. Ainsi,

— $\forall a \in]0; 1[, \ln(a) < 0 \implies f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

— $\forall a \in]1; +\infty[, \ln(a) > 0 \implies f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

♣ Tableaux de variation :

Cas où $a \in]0; 1[$

x	$-\infty$	a	1	$+\infty$
$f'(x)$			+	
$f(x)$	$+\infty$	a^a	a	0

Cas où $a \in]1; +\infty[$

x	$-\infty$	1	a	$+\infty$
$f'(x)$			+	
$f(x)$	0	a	a^a	$+\infty$

♣ Branches infinie. :

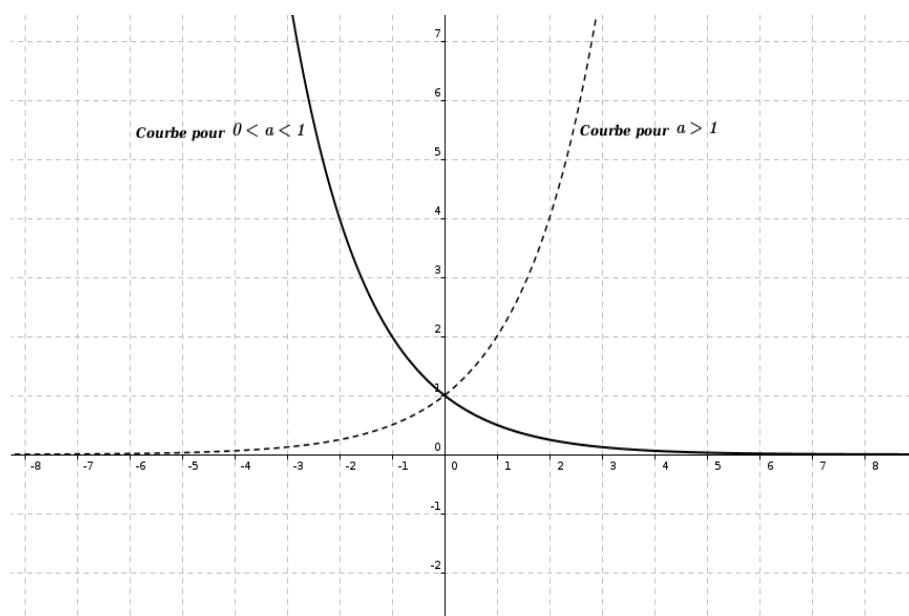
— $\forall a \in]0; 1[, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, donc la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

On aussi $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ de plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, donc la courbe admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $-\infty$.

— $\forall a \in]1; +\infty[, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, donc la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

On aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, donc la courbe admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $+\infty$.

♣ Courbes :



8.6 Fonction puissance

DÉFINITION 8.6.1 ✿

On appelle fonction puissance (d'exposant α ,) la fonction qui $x \mapsto x^\alpha, x \in]0; +\infty[, \alpha \in \mathbb{R}$.

8.6.1 Étude de la fonction $g_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.

♣ Ensemble de définition : On a : $D_{g_\alpha} = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ et } x > 0\} =]0; +\infty[$.

♣ Les limites :

$$- \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\alpha \ln(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \text{ car } \alpha \ln(x) \rightarrow -\infty \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \text{ car } \alpha \ln(x) \rightarrow +\infty \end{cases}.$$

$$- \lim_{+\infty} g(x) = \lim_{+\infty} e^{\alpha \ln(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \text{ car } \alpha \ln(x) \rightarrow +\infty \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \text{ car } \alpha \ln(x) \rightarrow -\infty \end{cases}.$$

♣ Dérivée-Sens de variation :

$\xi \in]0; +\infty[, g_\alpha$ est dérivable et on obtient : $g'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln(x)}$.

$\forall x \in]0; +\infty[, e^{\alpha \ln(x)} > 0$ donc le signe de g'_α est celui de α . Ainsi,

— Pour $\alpha > 0, g'_\alpha > 0 \Rightarrow g_\alpha$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

— Pour $\alpha < 0, g'_\alpha < 0 \Rightarrow g_\alpha$ est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

♣ Tableaux de variation :

Cas où $\alpha > 0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$

Cas où $\alpha < 0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$+\infty$	0

♣ Branches infinie :

• $\alpha > 0$, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_\alpha(x) = +\infty$, de plus

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g_\alpha(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(\alpha-1) \ln(x)}$$

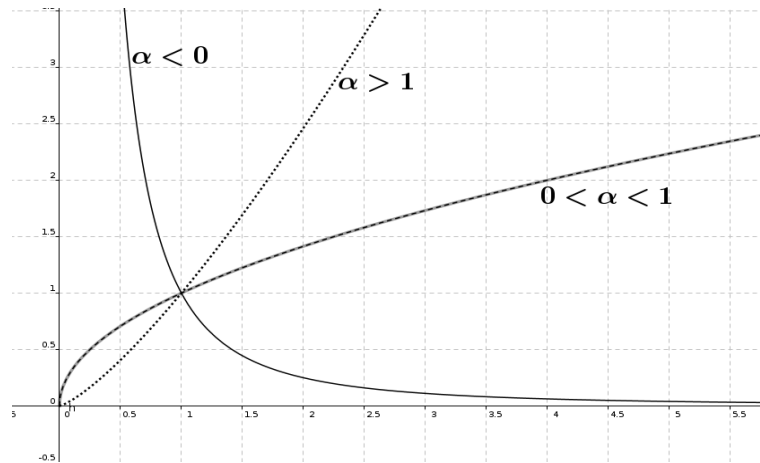
$$= \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 1 \\ 0 & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}. \text{ Ainsi :}$$

• $\alpha > 1, (\mathcal{C}_{g_\alpha})$ admet une branche parabolique de cette direction celle de (OJ) .

• $\alpha < 1, (\mathcal{C}_{g_\alpha})$ admet une branche parabolique de cette direction celle de (OI) .

• $\alpha < 0$, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_\alpha(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g_\alpha(x) = +\infty$, donc $(\mathcal{C}_{g_\alpha})$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$ et verticale d'équation $x = 0$ à $+\infty$.

♣ Les courbes :



8.7 Exercices d'entraînement

Problème 8.7.1 ...

f est la fonction sur $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$. On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On pose $g(x) = 1 + (1 - x)e^{-x}$.

Partie A

- Étudier les variations de g et déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que $f'(x) = g(x)$ puis étudier les variations de f .
- Montrer que la droite $(D) : y = x + 1$ est asymptote oblique pour $(\mathcal{C}_f)$, puis étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et de (D) .
 - La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet en un point A une tangente parallèle à la droite (D) . Déterminer les coordonnées du point A .
- Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution notée α telle que $0 < \alpha < 1$.
- Construire la droite (D) , placer le point A puis construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la tangente en A à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
 - Donner par lecture graphique une valeur approchée de α .

Partie B

- Démontrer que sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 2$ équivaut à l'équation $\frac{e^x}{e^x + 1} = x$.
- On appelle h la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $h(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$. Étudier les variations de h sur $[0; 1]$.
 - En déduire que $\forall x \in [0; 1], h(x) \in [0; 1]$.

(c) Étudier les variations de h' sur $[0; 1]$.

(d) En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$, $0 \leq h'(x) \leq \frac{1}{4}$.

3. On définit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Démontrer que la suite $\forall x \in \mathbb{N}, U_n \in [0; 1]$.
- Démontrer que $\forall x \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |U_n - \alpha|$.
- Démontrer que $\forall x \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.
- Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .
- Déterminer un entier p tel que U_p soit une valeur approchée à 10^{-6} près de α .

Problème 8.7.2 ...

On se propose d'étudier la famille de fonctions de

$\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}}$, où $n \in \mathbb{N}$.

On pourra remarquer que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = \frac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}$.

Partie A

1. Étude de f_0

- n est fixé dans $\mathbb{N}$. Étudier les variations de f_n ainsi que les branches infinies de sa courbe représentative $(\mathcal{C}_n)$ (on ne construira pas cette courbe). On fera un tableau de variation pour chacun des cas : $n = 0, n = 1$ et $n \geq 2$.

- (b) Démontrer que lorsque n décrit $\mathbb{N}$, les courbes $(\mathcal{C}_n)$ passent par un point fixe Ω que l'on déterminera.

2. Étude des fonctions f_0 et f_1

- (a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = f_0(-x)$. Que peut-on en déduire pour les courbes $(\mathcal{C}_0)$ et $(\mathcal{C}_1)$?
- (b) Calculer $f_0''(x)$, dérivée seconde de f_0 . Pour quelle valeur de x_0 a-t-on $f_0'(x_0) = 0$? Trouver une équation de la tangente à $(\mathcal{C}_0)$ au point d'abscisse x_0 .
- (c) Démontrer que le point Ω déterminé au 1-b) est centre de symétrie de chacune des courbes $(\mathcal{C}_0)$ et $(\mathcal{C}_1)$.
- (d) Construire les courbes $(\mathcal{C}_0)$ et $(\mathcal{C}_1)$ dans le même repère orthonormé (4cm).

3. Étude de f_2 .

- (a) Démontrer que f_2 admet une application réciproque notée φ dont on précisera seulement l'ensemble de définition et quelques propriétés (continuité, sens de variation, dérivabilité) On notera (Γ) la courbe représentative de φ .
- (b) Trouver une équation de la tangente à $(\mathcal{C}_2)$ au point d'abscisse nulle et une équation de la tangente à (Γ) au point $B(\frac{1}{2}, 0)$.
- (c) Construire les courbes $(\mathcal{C}_2)$ et (Γ) dans un autre repère orthonormé (4cm).

Partie B Soit la suite réelle définie par $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

- (a) Remarquer que $\forall x \in \mathbb{R}, f_0(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ où $g(x) = 1 + e^x$. En déduire la valeur de U_0 .
- (b) Calculer $U_0 + U_1$, en déduire la valeur de U_1
- (a) Soit la suite (V_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = U_n + U_{n+1}$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = \frac{1 - e^{-n}}{n}$.
- (b) En déduire que V_n tend vers une limite quand n tend vers l'infini et calculer cette limite.

3. Après avoir étudié le signe de U_n , déduire de 2-b) que U_n tend vers une limite quand n tend vers l'infini et calculer cette limite.

Problème 8.7.3 ...

Partie A

On considère les fonctions numériques f_m de la variable réelle x définie par :

$f_m(x) = e^x - m(x+1)$, où m est paramètre réel. On désigne par $(\mathcal{C}_m)$ la courbe représentation de f_m dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (Unité : 2cm).

- Étudier les variations de la fonction f_1 et tracer sa courbe représentation graphique $(\mathcal{C}_1)$.
- Soit la droite $(\Delta) : y = x - 1$. Calculer en centimètre carré l'aire $A(\alpha)$ de la portion du plan limitée par $(\mathcal{C}_1)$, par la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$. (où α est un réel négatif). Déterminer la limite de $A(\alpha)$ quand α tend vers $-\infty$.
- Étudier, suivant les valeurs de m , les variations de f_m . On précisera les limites de f_m aux bornes de l'ensemble de définition.
- Montrer que toutes les courbes passent par un point fixe B dont les coordonnées sont indépendantes de m .
- Montrer que la droite $(D_m) : y = -mx - m$ est asymptote à $(\mathcal{C}_m)$ et déterminer la position de cette courbe par rapport à (D_m) .

Partie B

À tout point M du plan $(\mathcal{P})$ d'affixe z , ($z = x + iy$), on associe, par une application T , le point M' d'affixe z' ($z' = x' + iy'$) :

$$T : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$

$$M \longmapsto M' / z' = (1 - i)z + 1 + i$$

- Quelle est la nature de T , Déterminer ses éléments caractéristiques.
- Déterminer l'expression analytique de T .
- Déterminer l'ensemble $(\mathcal{C}'_1)$, image de la courbe $(\mathcal{C}_1)$ par T .

Partie C

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie par :

$$g(x) = x - \ln(x^2).$$

- Étudier les variations de g et tracer sa courbe représentation (Γ) dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Préciser les branches infinies.
- Tracer la courbe $(\mathcal{C}'_1)$ dans le même repère que (Γ) .

Problème 8.7.4 ...

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe (unité 2cm).

A./ Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = x + 2 - e^x$.

1./ Étudier le sens de variation de g sur $[0; +\infty[$ et déterminer la limite de g en $+\infty$.

2./ Montrer que $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; +\infty[$ telle que $1, 14 < \alpha \leq 1, 15$.

B./ 3./ En-déduire le signe de $g(x)$.
1./ Montrer que,

$$\forall x \in [0; +\infty[, f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}.$$

En déduire le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.

2./ Montrer que, $\forall x \geq 0, f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$.
En déduire la limite de f en $+\infty$ puis interpréter le résultat.

3./ Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{1 + \alpha}$ puis donner un encadrement de $f(\alpha)$ en utilisant la question A.2./

4./ Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0 .

5./ a./ Établir que : $\forall x \in [0; +\infty[,$
$$f(x) - x = \frac{(x + 1)\varphi(x)}{xe^x + 1} \quad \text{avec}$$

$$\varphi(x) = e^x - xe^x - 1.$$

b./ Étudier le sens de variation de φ sur $[0; +\infty[$. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $[0; +\infty[$.

c./ Déduire des questions précédentes la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la tangente (T) .

d./ Tracer $(\mathcal{C})$ et (T) .

C./ 1./ Déterminer une primitive F de f sur $[0; +\infty[$; Utiliser l'expression de $f(x)$ établie en B.2./

On note Δ , le domaine du plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, la tangente (T) , les droites $x = 0$ et $x = 1$.

2./ Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ du domaine Δ .

Problème 8.7.5 ...

On se propose d'étudier la famille de fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}}$, où $n \in \mathbb{N}$.

On pourra remarquer que f_n peut s'écrire encore

sous la forme $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = \frac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}$, $(\mathcal{C}_n)$ désigne la courbe graphique de la fonction f_n .

PARTIE A : Vérification des acquis

1. Étude de f_n NB : *Il faut avoir à l'esprit que n est un entier naturel.*

(a) Après une profonde concentration, déterminer le plus beau ensemble de définition D_{f_n} de f_n .

(b) Déterminer la limite de f_n en $+\infty$ dans les deux cas suivant : $n = 0$ et $n \neq 0$

(c) Déterminer la limite de f_n en $-\infty$ suivant les valeurs de n . (NB : pour la limite de f_n en $-\infty$, prendre la deuxième forme et remarquer que la réponse dépend du signe de $n - 1$ qui donnera trois cas : $n = 0, n = 1$ et $n \geq 2$)

(d) Montrer que la plus belle fonction dérivée de f_n est :

$$f'_n(x) = \frac{e^{-nx}}{(1 + e^{-x})^2} \times [-n + (1 - n)e^{-x}].$$

(e) Étudier le signe de $\frac{1 - n}{n}$ suivant les valeurs de n (NB : $n \geq 0$ et c'est un entier).

(f) En déduire le signe de la dérivée, après annulation, suivant les valeurs de x .

(g) Dresser le plus beau tableau de variation de f_n suivant les valeurs de n . (cas $n = 0, n = 1$ et $n \geq 2$).

(h) Étudier les branches infinies de la courbe représentative $(\mathcal{C}_n)$. (cas $n = 0, n = 1$ et $n \geq 2$).

(i) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{C}_n)$ passent par un point fixe Ω que l'on déterminera.

2. Étude des fonctions f_0 et f_1

(a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = f_0(-x)$.
Que peut-on en déduire pour les courbes $(\mathcal{C}_0)$ et $(\mathcal{C}_1)$?

(b) Durant une forte réflexion, déterminer $f''_0(x)$, dérivée seconde de f_0 .

(c) Pour quelle valeur de x_0 a-t-on $f''_0(x_0) = 0$?

(d) Trouver une équation de la tangente à $(\mathcal{C}_0)$ au point d'abscisse x_0 .

- (e) Démontrer que le point Ω déterminé à la question 1 - i) est centre de symétrie de chacune des courbes $(\mathcal{C}_0)$ et $(\mathcal{C}_1)$.
- (f) Construire les courbes $(\mathcal{C}_0)$ et $(\mathcal{C}_1)$ dans le même repère orthonormé (4cm).

PARTIE B : Quand l'avancée devient dure, seuls les durs avancent

Soit la suite réelle définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \int_0^1 f_n(x) dx.$$

- (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f_0(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ où $g(x) = 1 + e^x$. En déduire la valeur de U_0 .
- (b) Calculer $U_0 + U_1$, en déduire la valeur de U_1 .
- (a) Soit la suite (V_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = U_n + U_{n+1}$. Démontrer que ,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = \frac{1 - e^{-n}}{n}.$$

(b) En déduire que V_n tend vers une limite quand n tend vers l'infini et calculer cette limite.
- Après avoir étudié le signe de U_n à partir de l'écriture de U_n , déduire de 2 - b) que U_n tend vers une limite quand n tend vers l'infini et calculer cette limite.

Problème 8.7.6 ...

Pour tout réel m , on considère la fonction f_m définie sur $]0; +\infty[$ par $f_m(x) = \ln(e^x + mx) - x$. Soit $(\mathcal{C}_m)$, sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) ; unité 5 cm sur (OI) et 10 cm sur (OJ) .

PARTIE A : Vérification des acquis

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \ln(1 + x) - x$.

- a.) Étudier le sens de variation de la fonction g .
- b.) En déduire le tableau de variation de la fonction g .
- En déduire de la question 1b./ :
 - Le signe de la fonction g sur $[0; +\infty[$.
 - Et que $\forall x \in [0; +\infty[, \ln(1 + x) \leq x$.

PARTIE B : Contrôle des capacités

On suppose dans cette partie que $m = 1$. Ainsi $f_m(x) = f_1(x) = \ln(e^x + x) - x$.

- Montrer que $\forall x \in [0; +\infty[, f_1'(x) = \frac{1 - x}{e^x + x}$.
- En déduire les sens de variations de la fonction f_1 .
- Montrer que $\forall x \in [0; +\infty[, f_1(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)$. En déduire la limite de la fonction f_1 en $+\infty$.
- a./ Au regard de tout ce qui précède, dresser un très bon tableau de variation digne de ce nom de f_1 .
- b./ Montrer que f_1 admet une bijection réciproque f_1^{-1} , d'un ensemble I sur un ensemble J à préciser.

PARTIE C : Renforcement des capacités

On suppose cette fois-ci que $m = -5$. Ainsi $f_m(x) = f_{-5}(x) = \ln(e^x - 5x) - x$.

- Soit h , la fonction définie pour $x > 0$, par $h(x) = e^x - 5x$.
 - Étudier les sens de variation de la fonction h puis dresser son tableau de variation.
 - Montrer qu'il existe deux réels α_1 et α_2 de l'intervalle $]0; +\infty[$ tels que $h(\alpha_1) = 0$ et $h(\alpha_2) = 0$.
 - En déduire le signe de la fonction h .
 - Montrer alors que : $\forall \alpha \in \{\alpha_1; \alpha_2\}, \alpha = \ln(5) + \ln(\alpha)$.
- Déterminer l'ensemble de définition D de f_{-5} puis calculer les limites aux bornes de cet ensemble.
- On suppose que $m > 0$.
 - Montrer que pour tout $x \in [0; +\infty[, f_m(x) = \ln\left(1 + m \frac{x}{e^x}\right)$. En déduire la limite de f_m en $+\infty$.
 - Étudier la fonction f_m puis dresser son tableau de variation sans défaut.
 - Montrer que pour tout $x \in [0; +\infty[, f_m(x) \leq \frac{m}{e}$.
- Déterminer avec une meilleure précision l'équation de la tangente (T_m) à $\mathcal{C}_m$ au point O .
- Soient p et k deux réels strictement positifs tels que $p < k$; étudier la position relative de $(\mathcal{C}_p)$ et $(\mathcal{C}_k)$.
- Tracer les courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ ainsi que les tangentes (T_1) et (T_2) .
- Soit la fonction H définie par $H(x) = \ln(1 - xe^x)$ et (Γ) sa courbe.
 - Trouver une relation entre H et f_1 .

- b./ En déduire comment passer de $(\mathcal{C}_1)$ à (Γ) . Tracer (Γ) .

PARTIE D : *Quand l'avancée devient dure, seuls les durs avancent*

Soit $\lambda > 0$. On note $\mathcal{A}(\lambda)$, l'aire en unité d'aire (c'est-à-dire $\mu a = 1 \text{ cm}^2$) du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathcal{C}_m)$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

- 1./ Sans calculer $\mathcal{A}(\lambda)$, montrer que

$$\mathcal{A}(\lambda) = m \int_0^\lambda x e^{-x} dx.$$

- 2./ Calculer $\int_0^\lambda x e^{-x} dx$.

- 3./ Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda) \leq m$. Interpréter graphiquement ce résultat.

CHAPITRE 9

INTÉGRATIONS

Sommaire

9.1 Définition et Propriétés	95
9.1.1 Conséquences et Propriétés	96
9.1.2 Inégalité de la moyenne	97
9.1.3 Valeur moyenne d'une fonction	98
9.1.4 Intégration par partie	98
9.2 Calcul d'aire , interprétation graphique d'une intégrale	99
9.2.1 Intégration d'une fonction paire, impaire et périodique	99
9.2.2 Aire d'une partie du plan limitée par une fonction	99
9.2.3 Aire d'une partie du plan limitée par deux fonctions	99
9.3 Calcul approché d'une intégrale	100
9.4 Exercices d'entraînement	101

Objectifs pédagogiques

L'élève doit être capable de :

- ☞ Déduire un encadrement de $\int_a^b f(x) dx$ connaissant un encadrement de la fonction f continue sur $[a; b]$ par deux fonctions continues sur $[a; b]$.
- ☞ Calculer l'intégrale de a à b de f connaissant une primitive de la fonction donnée f , continue sur $[a; b]$.
- ☞ Utiliser la propriété de linéarité ou l'inégalité de Chasles pour calculer une intégrale.
- ☞ Appliquer la technique d'intégration par parties pour calculer une intégrale lorsque l'énoncé le précise.
- ☞ Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (OI) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ où $(\mathcal{C})$ est la courbe représentative dans un repère d'une fonction f dont on sait calculer une primitive sur $[a; b]$.
- ☞ Calculer une primitive de $f - g$ sur $[a; b]$, calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ où $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont les courbes représentatives de f et g dans un même repère.

- ☞ Trouver les primitives et calculer des intégrales de :
 - fonctions pouvant se mettre sous la forme $\frac{u'}{u}; u'e^u$ lorsque l'énoncé suggère le choix de la fonction u .
 - fonctions rationnelles (si la forme de la décomposition n'apparaît pas, l'énoncé demandera d'écrire cette fonction comme somme de fonctions dont on sait trouver des primitives).
- ☞ Appliquer la méthode des rectangles pour avoir une valeur approchée d'une intégrale.
- ☞ Calculer la valeur moyenne d'une fonction numérique continue sur $[a; b]$.

9.1 Définition et Propriétés

DÉFINITION 9.1.1 ✿

Soit f une fonction continue sur un intervalle K . a et b deux éléments de K . On appelle **intégrale de a à b de f** , le nombre réel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur K . On note :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

et on lit : **somme ou intégrale de a à b de $f(x)dx$** . a et b sont les bornes de l'intégrale et x est appelée **variable muette**.

Remarque 9.1.I

On peut aussi noter :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(w)dw = \int_a^b f(u)du$$

Exemple 9.1.1 ... ☞

$$\text{Déterminer : } A = \int_2^4 (5x)dx \quad ; \quad B = \int_0^1 (x^2)dx.$$

Résolution 9.1.1 ✿

$$\begin{aligned} A &= \int_2^4 (5x)dx \\ &= \left[\frac{5}{2}x^2 \right]_2^4 \\ &= \frac{5}{2}(4)^2 - \frac{5}{2}(2)^2 \\ &= 30 \implies \underline{A = 30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \int_0^1 (x^2) dx \\
&= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}(1)^3 - \frac{1}{3}(0)^3 \\
&= 30 \implies \underline{\underline{A = \frac{1}{3}}}
\end{aligned}$$

9.1.1 Conséquences et Propriétés

Propriété 9.1.1 ❀

Soit f une fonction continue sur K , a et b deux éléments de K . On a :

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Propriété 9.1.2 ❀

Soit f une fonction continue sur K , $a \in K$. La fonction : $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f sur K et qui s'annule en a .

Application linéaire Soit f une application. f est linéaire si et seulement si :

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(\alpha x) = \alpha f(x) \end{cases}, \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ ou } f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Propriété 9.1.3 (Linéarité de l'intégrale) ❀

Soient f et g deux fonctions continues sur K , a et b deux éléments de K , et $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b (f+g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad \Bigg| \quad \int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$$

On exprime ces deux propriétés en disant que l'intégrale est linéaire.

Propriété 9.1.4 (Relation de Chasles) ❀

Soit f une fonction continue sur K , a, b et c deux éléments de K , On a :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Exemple 9.1.2 ...

$$\text{Calculer } C = \int_0^2 |x-1| dx.$$

Résolution 9.1.2 ✱

Posons $f(x) = |x - 1|$. Écrivons la d'abord sans le symbole de la valeur absolue, on a :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$x - 1$		$-$	0	$+$	
$ x - 1 $		$-x + 1$	0	$x - 1$	

Donc,

$$\begin{aligned}
 C &= \int_0^2 |x - 1| dx \\
 &= \int_0^1 (-x + 1) dx + \int_1^2 (x - 1) dx \\
 &= \left[-\frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 \\
 &= \left[\left(-\frac{1}{2} + 1 \right) - \left(-\frac{0}{2} + 0 \right) \right] + \left[\left(-\frac{2^2}{2} - 2 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right] \\
 &= 1 \quad \underline{C=1}
 \end{aligned}$$

Propriété 9.1.5 (Positivité de l'intégrale) ✱

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et positive alors : $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Propriété 9.1.6 (Comparaison) ✱

Si $f \leq g$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Remarque 9.1.II

On a :

$$\begin{aligned}
 -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \text{ sur } [a, b] &\implies -\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \\
 &\iff \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx
 \end{aligned}$$

9.1.2 Inégalité de la moyenne

Soient f une fonction continue sur K , a et $b \in K/a < b$.

Si M et m sont deux éléments de $\mathbb{R}/\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$ alors

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a) \quad (9.1)$$

qui est connue sous la formule de **l'inégalité de la moyenne**.

Remarque 9.1.III

Si $m = -M, M > 0$ alors (9.1) devient : $-M(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a) \implies \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M(b - a)$.

9.1.3 Valeur moyenne d'une fonction

(9.1) $\implies m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$. En divisant tous les termes par $b-a$, on a :

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M.$$

On appelle **valeur moyenne de f sur $[a, b]$** , le nombre réel

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

THÉORÈME 9.1.1 (CONSÉQUENCE) ✱

On a : pour $a < b, m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$. Or $\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$, donc il existe un réel $c \in [a, b]$ / $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \implies (b-a)f(c) = \int_a^b f(x)dx$.

Exercice 9.1.1 ... ✎

Calculer $I = \int_0^1 (x^3 + 2x + 1)dx$; $J = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2x}{x^2 - 1} \right) dx$; $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \sin^3(x) dx$

$$L = \int_{-4}^{-3} \frac{dt}{t(t+1)^2}.$$

Solution 9.1.1 ✱

$I = \frac{9}{4}$; $J = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$ et $K = \frac{2}{15}$.

9.1.4 Intégration par partie

Soient u et v deux fonctions dérivables sur K / u' et v' soient continues sur K . Soient a et b deux éléments de K . On a :

$$\int_a^b u(t) \times v'(t) dt = \left[u(t) \times v(t) \right]_a^b - \int_a^b u'(t) \times v(t) dt$$

cette formule est connue sous le nom **d'intégration par partie**.

Démonstration: Évidente.

Exemple 9.1.3 ... ✎

Calculer $I = \int_1^2 \ln(t) dt$ et $J = \int_0^t \sin(t) e^t dt$

Solution 9.1.2 ✱

$I = 2\ln(2) - 1$; $J = \frac{1 + e^\pi}{2}$.

9.2 Calcul d'aire , interprétation graphique d'une intégrale

9.2.1 Intégration d'une fonction paire, impaire et périodique

Soit f une fonction continue sur K et $a \in \mathbb{R}$.

- Si f est paire alors

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx \quad \text{et} \quad \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \times \int_0^a f(x)dx$$

- Si f est impaire alors

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = - \int_0^a f(x)dx \quad \text{et} \quad \int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

- Si f est périodique de période T alors

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

Exemple 9.2.1 ... 

Déterminer :

$$A = \int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{dx}{\cos^2(3x)} \quad B = \int_{-3}^3 \frac{1-e^x}{1+e^x} dx \quad C = \int_3^{3+\frac{2\pi}{3}} \sin^2(3x) dx$$

9.2.2 Aire d'une partie du plan limitée par une fonction

Soit f une fonction définie sur K , a et $b \in K/a < b$.

On veut calculer l'aire du domaine (Δ) délimité par la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f , l'axe (OI) et les droites d'équations $x = a, x = b$ qui est notée $\mathcal{A}(\Delta)$.

1. Si f est continue et positive ($f(x) > 0$) alors :

$$\mathcal{A}(\Delta) = \left(\int_a^b f(t)dt \right) \times \mu_a$$

où μ_a est l'unité d'aire du rectangle de dimension (OI) et (OJ).

2. Si f est continue et négative ($f(x) < 0$) alors :

$$\mathcal{A}(\Delta) = \left(- \int_a^b f(t)dt \right) \times \mu_a$$

3. Cas où f n'admet pas de signe constant.

Dans ce cas on doit subdiviser (Δ) en 2 ou plusieurs domaines pour que la fonction ait un signe constant sur ces domaines.

Exemple 9.2.2 ... 

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\Delta) &= \mathcal{A}(\Delta_1) + \mathcal{A}(\Delta_2) + \mathcal{A}(\Delta_3) \\ &= \left[\int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx \right] \times \mu_a \end{aligned}$$

9.2.3 Aire d'une partie du plan limitée par deux fonctions

Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (\Delta) : \begin{cases} a & \leq x & \leq b \\ g(x) & \leq y & \leq f(x) \end{cases}$ On a :

$$\mathcal{A}(\Delta) = \left(\int_a^b (f(t) - g(t))dt \right) \times \mu_a$$

9.3 Calcul approché d'une intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle K . Soient a et $b \in \mathbb{R}/a < b$ et $A = \int_a^b f(x)dx$. Il n'est pas toujours possible de déterminer A , à cet effet on peut trouver une valeur approchée de A qu'on note A' .

L'erreur commise en remplaçant A par A' est $|A - A'|$.

Il existe plusieurs méthodes pour obtenir des valeurs approchées d'une intégrale, à savoir : **méthodes des rectangles, méthodes des points médians ou méthode des trapèze.** Mais on va seulement s'intéresser à la méthode des rectangles.

Méthode des rectangles

Soit f une fonction continue est strictement croissante sur $[a, b]$

La méthode consiste à partager l'intervalle $[a, b]$ en n petits intervalles de même amplitude : $h = \frac{b-a}{n}$. Ainsi , on a :

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_1 &= a + \frac{b-a}{n} \\ x_2 &= x_1 + \frac{b-a}{n} = a + 2\left(\frac{b-a}{n}\right) \\ x_3 &= x_2 + \frac{b-a}{n} = a + 3\left(\frac{b-a}{n}\right) \\ &\vdots \\ x_n &= a + n\left(\frac{b-a}{n}\right) = a + b - a = b \end{aligned}$$

$\forall x \in [x_i, x_{i+1}], x_i \leq x \leq x_{i+1}$ avec $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

f étant croissante,

$$\begin{aligned} x_i \leq x \leq x_{i+1} &\implies f(x_i) \leq f(x) \leq f(x_{i+1}) \\ &\implies \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)dx \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_{i+1})dx \\ &\iff f(x_i)(x_{i+1} - x_i) \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \leq f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i) \\ &\iff \left(\frac{b-a}{n}\right) f(x_i) \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \leq \left(\frac{b-a}{n}\right) f(x_{i+1}) \\ &\iff \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \leq \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) \text{ Or} \end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx + \dots = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

$$\text{Donc } \iff \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})$$

Par conséquent, on a $\left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \leq A = \int_a^b f(x)dx \leq \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})$ et

une valeur :

• par défaut de $A = \int_a^b f(x)dx$ est : $A_1 = \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$.

• par excès de $A = \int_a^b f(x)dx$ est : $A_2 = \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})$.

9.4 Exercices d'entraînement

Exercice 9.4.1 ...

On pose $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$; $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$ et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx$.

- Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.
 - Calculer $f'(x)$ de f pour $x \in \mathbb{R}$.
 - Déduire la valeur exacte de I .
- A l'aide d'une intégration par parties portant sur K , exprimer K en fonction de J .
 - Montrer que $I = J + K$. En déduire les valeurs de K et J .
 - Calculer $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Exercice 9.4.2 ...

On pose $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$; $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$ et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx$.

- Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$.
 - Calculer $f'(x)$.
 - Déduire la valeur exacte de I .
- Vérifier que $J + 2I = K$.
 - A l'aide d'une intégration par parties portant sur K , montrer que $K = \sqrt{3} - J$.
 - En déduire les valeurs de J et de K .

Exercice 9.4.3 ...

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$U_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \text{ et } \forall n > 0, U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

- Soit f la fonction numérique définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. Calculer la dérivée f' de f . En déduire U_0 .
 - Calculer U_1 .
- Prouver que la suite (U_n) est décroissante. En déduire que la suite (U_n) est convergente.
 - Montrer que pour tout nombre réel $x \in [0;1]$ et $\forall n \geq 1$, on a : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$. Déterminer alors la limite de U_n .
- Pour tout $n \geq 3$, on pose : $I_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{x^2+1}dx$.
 - Vérifier que $\forall n \geq 3$, on a : $U_n + U_{n-2} = I_n$.
 - Par une intégration par parties portant sur I_n , montrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a : $nU_n + (n-1)U_{n-2} = \sqrt{2}$.

Exercice 9.4.4 ...

Pour tout entier naturel n , on considère les intégrales : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin(x)dx$; $J_n =$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos(x)dx.$$

- Calculer I_0 et J_0 .
- Soit n un entier naturel non nul ;
 - En intégrant par partie I_n puis J_n , montrer que I_n et J_n

$$\text{vérifient le système : } (S) : \begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}} \end{cases}$$

- (b) En déduire, pour n entier naturel non nul, les expressions de I_n et J_n en fonction de n .

Exercice 9.4.5 ...

On pose pour tout entier n , $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$.

- Démontrer que pour tout entier n , I_n existe et est minorée par 0.
- Calculer I_0 .
- A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 .
- (a) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel non nul n , $3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$.
(b) En déduire la valeur de I_2, I_3 et de I_4

Exercice 9.4.6 ...

- Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} a - b = 0 \\ a + b + c = \frac{\pi}{2} \\ a + b - 3c = 0 \end{cases}$$

- On se propose de calculer simultanément les valeurs des trois intégrales suivantes : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$ et

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 x \sin^2 x dx.$$

- Montrer que : $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$.
 - En déduire $I - J$
 - Montrer que : $\cos^4 x - \sin^4 x + 2\cos^2 x \sin^2 x = 1$.
 - En déduire $I + J + K$
 - Montrer que : $\cos^4 x - \sin^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x = \cos 4x$.
 - En déduire $I + J - 3K$
- Déduire de ce précède que I, J et K vérifient le système (S) , puis donner leur valeurs

Exercice 9.4.7 ...

On considère les intégrales : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4(x) dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4(x) dx$.

- (a) Montrer que l'intégrale I peut s'écrire :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x) dx.$$

- (b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx - \frac{1}{3}J + \frac{5}{12}.$$

- (c) Montrer de même que $J =$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx - \frac{1}{3}I - \frac{5}{12}.$$

- (a) Calculer $I + J$.
(b) Calculer $I - J$.
(c) En déduire les intégrales I et J .

Exercice 9.4.8 ...

Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale I

$$\text{définie par : } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}.$$

- (a) Montrer l'existence de nombres réels a et b tels que :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], \frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x}.$$

- (b) En déduire le calcul de I_0 .

- (a) Montrer par une intégration par partie que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- (b) En déduire le calcul de I .

Exercice 9.4.9 ...

(I_n) est la suite numérique définie par :

$$I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- En utilisant la technique d'intégration par parties, exprimer I_n en fonction de n .
- Démontrer que la suite (I_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- Soit $S_n = I_0 + I_1 + \dots + I_n$.
Exprimer S_n en fonction de n puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice 9.4.10 ...

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$

$$\text{par : } g(x) = \frac{1}{x(x^2 - 1)}.$$

- (a) Déterminer les réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x > 1$,
$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}.$$

- (b) Trouver une primitive G de g sur $[1; +\infty[$.
2. Trouver une primitive F de la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par :
- $$f(x) = \frac{2x}{(x^2 - 1)^2}.$$
3. En utilisant la technique d'intégration par parties et les résultats obtenus précédemment, calculer : $I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2 - 1)^2} \ln x dx$.

Exercice 9.4.11 ...

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par

$$:U_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} \text{ et } \forall n > 0, U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

- (a) Soit f la fonction numérique définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Calculer la dérivée f' de f . En déduire U_0 .
- (b) Calculer U_1 .
- (a) Prouver que la suite (U_n) est décroissante. En déduire que la suite (U_n) est convergente.
- (b) Montrer que pour tout nombre réel $x \in [0; 1]$ et $\forall n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$$
 Déterminer alors la limite de U_n .
- Pour tout $n \geq 3$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{x^2 + 1} dx.$$
 - Vérifier que $\forall n \geq 3$, on a : $U_n + U_{n-2} = I_n$.
 - Par une intégration par parties portant sur I_n , montrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a : $nU_n + (n-1)U_{n-2} = \sqrt{2}$.

Exercice 9.4.12 ...

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = (x+1)^n e^{-x} dx$.

- Calculer à l'aide d'une intégration par parties I_1 .
- Montrer à l'aide d'une intégration par parties que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = (n+1)I_n + 1 - \frac{2^{n+1}}{e}$.
- Exprimer I_2 en fonction de I_1 . En déduire I_3 en fonction de I_2 puis calculer I_3 .

4. Soit $I = \int_0^1 (x+1)(x^2-4)e^{-x} dx$.

- Déterminer les réels a, b et c tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 4 = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$
- En déduire I en fonction de I_1, I_2 et I_3 .
- Calculer I .

Exercice 9.4.13 ...

Soient les trois les plus belles intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}; J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \quad \text{et} \\ K = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx.$$

- Soit f une fonction numérique définie par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
 - Déterminer la fonction dérivée $f'(x)$ de f pour $x \in \mathbb{R}$.
 - En déduire la valeur exacte de I .
- A l'aide d'une intégration par parties portant sur K , exprimer K en fonction de J .
 - Montrer que $K - J = I$. En déduire les valeurs de K et J .
 - Calculer $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$.

Exercice 9.4.14 ...

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie

par : $f(x) = \frac{3x^3 - 5x^2 + 2x - 1}{x^2 - 4x + 4}$.

- Préciser l'ensemble D_f de définition de f .
- Déterminer les nombres réels $a; b; c$ et d tels que, pour tout x :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{(x-2)^2}.$$
- Donner une primitive de f sur $] -1; 1[$. Calculer alors $\int_{-1}^1 f(x) dx$

Exercice 9.4.15 ...

On se propose de calculer l'intégrale :

$$J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3} dx.$$

- Calculer les deux intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx \text{ et } B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx.$$

2. Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que pour tout nombre réel t positif ou nul, on ait :

$$\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2}.$$

3. En posant $t = e^x$ dans l'égalité précédente, calculer l'intégrale : $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2} dx$.
4. (a) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer J en fonction de I .
- (b) En déduire la valeur de J .
- (c) À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de J à 10^{-2} près.

Exercice 9.4.16 ...

1. (a) Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(\cos(x) - \sin(x))$ est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ puis calculer sa dérivée.
- (b) On pose :
- $$A(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\cos(x)}{\cos(x) - \sin(x)} dx \quad \text{et}$$
- $$B(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\sin(x)}{\cos(x) - \sin(x)} dx,$$
- $$\forall \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$
- b.1/ Calculer $A(\alpha) - B(\alpha)$ et $A(\alpha) + B(\alpha)$.
- b.2/ En déduire $A(\alpha)$ et $B(\alpha)$.
2. Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_1^e x \left[\ln(x) \right]^n dx$.
- (a) Calculer I_0 .
- (b) À l'aide d'une intégration par partie, calculer I_1 .
- (c) Montrer que $2I_n + nI_{n-1} = e^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire I_1 .
- (d) Montrer que la suite de terme général I_n est décroissante. En déduire en utilisant la relation de récurrence du (c) que :
- $$\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}.$$
- (e) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$.

CHAPITRE 10

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Sommaire

10.1 Généralité	106
10.1.1 Notation	106
10.2 Les types d'équations différentielles	106
10.2.1 Équation du type $y' = f(x)$	106
10.2.2 Équation du type $y'' = f(x)$	106
10.2.3 Équation du type $y' - ay = 0, a \in \mathbb{R}^*$	106
10.2.4 Équation différentielle du premier ordre avec second membre.	106
10.2.5 Équation différentielle du second degré du type $y'' - \omega^2 y = 0, \omega \in \mathbb{R}$	107
10.2.6 Équation différentielle du second degré du type $y'' + \omega^2 y = 0, \omega \in \mathbb{R}$	107
10.2.7 Équation différentielle du second degré du type $ay'' + by' + cy = 0, a, b, c \in \mathbb{R}$	107
10.3 Exercices d'entraînement	108

Objectifs pédagogiques

L'élève doit être capable de :

- ☞ Vérifier qu'une fonction est une solution différentielle donnée et qu'elle satisfait aux conditions initiales.
- ☞ Trouver une solution particulière d'une équation différentielle à partir des conditions initiales données.
- ☞ Utiliser les primitives pour résoudre certaines équations différentielles.
- ☞ Résoudre les types d'équations différentielles figurant au programme (utiliser l'équation caractéristique pour résoudre l'équation du type : $af'' + bf' + cf = 0$) où a, b et c sont des constantes réelles.

10.1 Généralité

DÉFINITION 10.1.1 ❀

Soit $P(x) = e^{2x}$. P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $P'(x) = 2e^{2x}$. La fonction P est liée à P' par la relation $P' - 2P = 0$. Nous disons que l'équation $y' - 2y = 0$ (où y est l'inconnu) constitue une équation dont P est la solution. On appelle ainsi une équation différentielle, une relation qui lie une fonction et ses dérivées.

10.1.1 Notation

La fonction inconnue est souvent notée y et ses dérivées $y', y'', \dots, y^{(n)}$.

NB : Une équation différentielle est dite d'ordre n si le plus grand ordre de la dérivée est n .

Exemple 10.1.1 ... ➡

$y'' + y' + 3y = 0$ est une équation différentielle d'ordre 2.

Résoudre (ou intégrer) une équation différentielle sur un intervalle K ouvert, c'est déterminer l'ensemble des solutions sur K , de cette équation différentielle.

10.2 Les types d'équations différentielles

10.2.1 Équation du type $y' = f(x)$

Résoudre sur $\mathbb{R}$, $y' = 28x^3$.

10.2.2 Équation du type $y'' = f(x)$

Résoudre $y'' = \cos(2x)$, $x \in \mathbb{R}$.

10.2.3 Équation du type $y' - ay = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$

Toute équation différentielle de la forme $y' - ay = 0$ avec $a \neq 0$ est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant sans second membre.

10.2.4 Équation différentielle du premier ordre avec second membre.

Soient $(E) : ay' + by = f(x)$ et $(E') : ay' + by = 0$.

- Si y_1 et y_2 sont solution de (E) alors $y_1 - y_2$ est solution de (E') .
- Si y_1 est solution particulière de (E) et y une solution de (E') alors $y_1 + y$ est solution de (E) .

Preuve

Démarche de résolution de l'équation $(E) : ay' + by = f(x)$

L'équation (E) se résout en deux étapes :

Étape 1 on Résous $(E') : ay' + by = 0$ appelée équation homogène pour trouver y .

Étape 2 On cherche une solution particulière y_1 de (E)

Ainsi la solution générale de (E) est la somme des solutions des deux étapes i.e $y + y_1$.

Exemple 10.2.1 ...

Soit $(E) : 3y' + 2y = \frac{4}{3}e^{2x}$. Après avoir vérifié que $f(x) = \frac{1}{6}e^{2x}$ est une solution particulière de (E) , Déterminer la solution générale de (E) .

10.2.5 Équation différentielle du second degré du type $y'' - \omega^2 y = 0, \omega \in \mathbb{R}$

La solution générale de cette équation est donnée par $y = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$

Exemple 10.2.2 ...

Résoudre : $y'' - 4y = 0$

10.2.6 Équation différentielle du second degré du type $y'' + \omega^2 y = 0, \omega \in \mathbb{R}$

La solution générale de cette équation est donnée par $y = A\cos(\omega x) + B\sin(-\omega x)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$

Exemple 10.2.3 ...

Résoudre : $y'' + 9y = 0$

10.2.7 Équation différentielle du second degré du type $ay'' + by' + cy = 0, a, b, c \in \mathbb{R}$

Pour résoudre une telle équation, on résout d'abord l'équation $ar^2 + br + c = 0$ appelée **équation caractéristique**. Et après, on calcule le discriminant de cette équation et on applique le tableau suivant :

Δ	Solution de l'équation caractéristique	Solution générale de l'équation différentielle
$\Delta = 0$	une solution double : r_0	$x \mapsto (Ax + B)e^{r_0 x}; A, B \in \mathbb{R}$
$\Delta > 0$	Deux (02) solutions r_1 et r_2	$x \mapsto Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}, A, B \in \mathbb{R}$
$\Delta < 0$	Deux solutions complexes conjuguées : $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$	$(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))e^{\alpha x}; A, B \in \mathbb{R}$

Exemple 10.2.4 ...

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2y'' - 2\sqrt{2}y' + y = 0$.

10.3 Exercices d'entraînement

Exercice 10.3.1 ...

On considère l'équation différentielle

$$(E_1) : y'' + 6y' + 9y = 9x^2 + 12x + 2.$$

1. Trouver un polynôme $P(x)$ de degré 2, solution de (E_1) .
2. Soit f une application deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $g(x) = e^{3x}(f(x) - P(x))$.
 - (a) Si on suppose que f est une solution de (E) , écrire une équation différentielle dont g est une solution ; on la note E_2 .
 - (b) Résoudre (E_1) et (E_2) (donner leurs solutions générales).
 - (c) Déterminer la solution h de (E_1) dont la courbe admet une tangente horizontale au point $A(0; 1)$.

Exercice 10.3.2 ...

On considère l'équation différentielle :

$$(E_1) : f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 8x^2 - 24x. \text{ où } f \text{ désigne une fonction numérique définie sur } \mathbb{R} \text{ que l'on cherche à déterminer.}$$

1. Déterminer les nombres réels a, b et c pour que la fonction numérique g définie par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de l'équation (E_1) .
2. Démontrer que la fonction f est solution de l'équation (E_1) si et seulement si la fonction $h = (f - g)$ est solution de l'équation différentielle $h'' - 3h' + 2h = 0 (E_2)$.
3. Résoudre l'équation différentielle (E_2) . En déduire les solutions de l'équation différentielle (E_1) .
4. Déterminer la solution particulière φ de l'équation différentielle (E_1) telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 0$.

Exercice 10.3.3 ...

On considère l'équation différentielle

$$(E_1) : f'(x) + f(x) = 2(x + 1)e^{-x}.$$

1. Déterminer a et b tels que la fonction g définie par $g(x) = (ax^2 + bx)e^{-x}$ soit solution de (E_1) .
2. Résoudre l'équation différentielle $(E_2) : y' + y = 0$.
3. On pose $u = f - g$.
 - (a) Montrer que si la fonction f est solution de (E_1) alors u est solution de (E_2) .

(b) Réciproquement, montrer que si u est solution de (E_2) , alors $f = g + u$.

(c) En déduire, pour tout x de $\mathbb{R}$ l'expression de $f(x)$ lorsque f est solution de (E) .

4. Déterminer la solution h de (E_1) dont la représentation graphique admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 10.3.4 ...

On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'' + y = e^x + e^{-x} \text{ ①.}$$

1. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle : $y'' + y = 0$ ②.
0.50
2. On considère f une solution quelconque de l'équation ① et g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - m(e^x + e^{-x})$ ③ où m est un réel.
 - (a) Déterminer la valeur de m pour que g soit solution de l'équation ②.
 - (b) Exprimer toutes les solutions f de l'équation ①, qui sont définies par la relation ③.
3. Parmi les fonctions définies en 2.(b)/, on note h celle qui vérifie $h(0) = 0$ et $h'(0) = 1$. Déterminer h .

Exercice 10.3.5 ...

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, la plus belle équation différentielle suivante : $y'' + 2y' + 2y = 0$ ①.

2. On considère la sœur de l'équation précédente définie par :

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \left(-x + \frac{1}{2} \right) \text{ ②.}$$

- (a) Déterminer les réels a et b pour que $g(x) = e^{-x}(ax + b)$ soit une solution de ②.
- (b) On pose $f(x) = g(x) + h(x)$.
Montrer que h est solution de ① si et seulement si f est solution de ②.
- (c) En déduire les solutions de ②.

Exercice 10.3.6 ...

On considère les équations différentielles suivantes dans lesquelles m désigne un paramètre réel :

$$(E) : y''(x) - 2my'(x) + 3y(x) = 2(1 - 2x)e^x \text{ et } (E') : y''(x) - 2my'(x) + 3y(x) = 0.$$

1. Résoudre, suivant les valeurs de m , l'équation (E') .
2. Déterminer m pour laquelle, la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 e^x$ est une solution de (E) .
3. Dans cette question, on donne $m = 2$.
 - (a) Soit φ une fonction au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
 - i. Montrer que si φ est une solution de (E) alors $\varphi - h$ est une solution de (E') .
 - ii. Montrer que si $\varphi - h$ est une solution de (E') alors φ est une solution de (E) .
 - (b) Dédire de la question 1./, la résolution de (E') puis résoudre (E) .
4. Déterminer la solution de l'équation (E) vérifiant $y'(0) = 1$ et $y''(0) = -1$

CHAPITRE 11

SUITES NUMÉRIQUES

Sommaire

11.1 Généralité	111
11.1.1 Détermination d'une suite	111
11.1.2 Propriétés des suites	111
11.1.3 Suite arithmétique & géométrique	112
11.1.4 Démonstration par récurrence	113
11.2 Limites d'une suite numérique	114
11.2.1 Limite infinie	114
11.2.2 Suite convergente	114
11.2.3 Suites de référence	114

Objectifs pédagogiques

L'élève doit être capable de :

- ☞ Utiliser les savoir-faire de première en ce qui concerne les suites arithmétiques et géométriques.
- ☞ Étudier le sens de variation d'une suite.
- ☞ Représenter graphiquement quelques termes de la suite U définie par son premier terme et la formule de récurrence $U_{n+1} = f(U_n)$ et conjecturer sur son sens de variation et sa convergence où la courbe représentative de f est connue.
- ☞ Étudier la convergence d'une suite géométrique et d'une suite de la forme $U_n = f(n)$ connaissant $\lim f$.
- ☞ Prouver qu'une suite est convergente sans chercher la limite en montrant qu'elle est croissante et majorée (resp. décroissante et minorée).
- ☞ Déterminer la limite (ou au moins un encadrement de celle-ci) d'une suite convergente de la forme $U_{n+1} = f(U_n)$.
- ☞ Étudier la convergence d'une suite en utilisant des minoration ou majoration par des suites de comportement connu.
- ☞ Utiliser la méthode des rectangles et la convergence des suites pour obtenir une valeur approchée d'une aire.

- ☞ Traduire en termes de suite une situation concrète.
- ☞ Connaissant une égalité (resp. inégalité) entre deux termes consécutifs quelconques, l'élève doit être capable de l'écrire pour n rangs et additionner ou multiplier membre à membre pour obtenir une égalité (resp. inégalité) avec n et le terme d'indice n seulement.

11.1 Généralité

DÉFINITION 11.1.1 ✿

Une suite est une application de $\mathbb{N}$ ou d'une partie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

- L'image de $n \in \mathbb{N}$ par une suite U est notée U_n (on lit U indice n). La suite considérée peut être notée aussi $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Si I est l'ensemble de définition de la suite, on note $(U_n)_{n \in I}$.
- Dans le cas où l'ensemble de définition de la suite est $\mathbb{N}$, $U_0, U_1, \dots, U_n$ sont respectivement appelés **premier terme**, **deuxième terme**, ..., **n -ième terme**.
- Une suite est dite finie (resp. infinie) selon que le nombre de terme reste **limité** (resp. **illimité**.)

11.1.1 Détermination d'une suite

Une suite numérique (U_n) est généralement définie :

- Soit par une **formule explicite** permettant de déterminer le terme U_n en fonction de n .

Ces suites sont du type $U_n = f(n)$ où f désigne une fonction numérique de la variable naturelle n . Dans ce cas on ramène l'étude de la suite à l'étude d'une fonction pour utiliser les propriétés de cette dernière.

Exemple 11.1.1 ... ☞

$$U_n = n + (-1)^n$$

- Soit par une **formule de récurrence** permettant de déterminer les termes U_n en fonction des termes d'indices inférieurs. Dans ce cas, la donnée des premiers termes (en nombre suffisant) permet de calculer de proche en proche les autres termes de la suite.

Exemple 11.1.2 ... ☞

$$(U_n) : \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 1 + 2U_n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$$

11.1.2 Propriétés des suites

Propriété 11.1.1 ✿

Une suite est dite :

- **Constante** si et seulement si $U_{n+1} = U_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
- **Stationnaire** si et seulement si elle est constante à partir d'un certain rang.

- **Croissante** (resp. **Décroissante**) si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n \geq 0$ (resp. $U_{n+1} - U_n \leq 0$).
- **Majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R} / U_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.
- **Minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R} / U_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}$.
- **Bornée** si elle est à la fois **majorée et minorée** c'est-à-dire $\exists A \in \mathbb{R}_+^* / |U_n| \leq A, \forall n \in \mathbb{N}$.
- **Périodique** si et seulement si il existe $\rho \in \mathbb{N}^* / U_{n+\rho} = U_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

11.1.3 Suite arithmétique & géométrique

Suite arithmétique

DÉFINITION 11.1.2 ✿

Une **suite arithmétique** est une suite de nombre où chacun d'eux sauf le premier (donné) est la **somme** du précédent et d'un nombre fixe appelé **raison** souvent notée r .

Si U_n est une suite arithmétique de raison r alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + r$$

Si U_a est l'un des termes connu alors la forme explicite de la suite est :

$$U_n = U_a + (n - a)r$$

Somme des termes d'une suite arithmétique

Soit $S = U_k + U_{k+1} + \dots + U_l$ On a :

$$S = \frac{N}{2}(U_k + U_l) \text{ où } N = l - k + 1 : \text{nombre de termes}$$

Ainsi :

$$S = U_1 + U_2 + \dots + U_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n)$$

Suite géométrique

DÉFINITION 11.1.3 ✿

Une **suite géométrique** est une suite de nombre où chacun d'eux sauf le premier (donné) est le **produit** du précédent par un nombre fixe appelé **raison** souvent notée q .

Si V_n est une suite géométrique de raison q alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = q \times V_n$$

Si V_a est l'un des termes connu alors la forme explicite de la suite est :

$$V_n = q^{n-a} V_a$$

Somme des termes d'une suite arithmétique

Soit $S = V_k + V_{k+1} + \dots + V_l$ On a :

$$S = V_k \times \frac{1 - q^N}{1 - q} \text{ où } N = l - k + 1 : \text{ nombre de termes}$$

Ainsi :

$$S = V_1 + V_2 + \dots + V_n = V_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

11.1.4 Démonstration par récurrence

Pour démontrer qu'une proposition (P_n) est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$, on peut adopter la **démonstration par récurrence**. Elle consiste :

1. Initialement, à établir que (P_n) est vraie pour une valeur particulière n_0 .
2. Ensuite à supposer que (P_n) est vraie au rang k ($k \geq n_0$) et montrer qu'elle l'est aussi au rang $k + 1$.
3. Puis on tire la conclusion que (P_n) est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exemple 11.1.3 ...

Soit (U_n) définie par $U_n = 2^{n+1} - 3n - 2$. Prouver que $U_n \geq 0, \forall n \geq 2$

Résolution 11.1.1 ✱

Procédons par récurrence sur n la démonstration. Soit $(P_n) : U_n \geq 0, \forall n \geq 2$

1. On a : $U_2 = 0 \implies U_2 \geq 0$ donc (P_2) est vraie.
2. Supposons que (P_n) est vraie au rang k c'est-à-dire $U_k \geq 0$
Montrons que (P_n) est aussi vraie au rang $k + 1$
On a :

$$\begin{aligned} U_{k+1} &= 2^{(k+1)+1} - 3(k+1) - 2 \\ &= 2^{k+2} - 3k - 5 \\ &= 2^{k+2} - 6k + 3k - 4 - 1 \\ &= 2(2^{k+1} - 3k - 2) + 3k - 1 \\ &= 2U_k + 3k - 1 \text{ or } U_k \geq 0 \text{ et } 3k - 1 \geq 0 \end{aligned}$$

donc $U_{k+1} \geq 0 \implies (P_n)$ est vraie au rang $k + 1$.

3. D'où $U_n \geq 0, \forall n \geq 2$

11.2 Limites d'une suite numérique

11.2.1 Limite infinie

On dit qu'une suite U_n a une limite infinie si elle prend des valeurs de plus en plus grandes lorsque n devient de plus en plus grand. On écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} |U_n| = +\infty$. Ainsi une suite qui a une limite infinie est dite **divergente**.

11.2.2 Suite convergente

La suite U_n est dite convergente et converge vers $l, l \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} |U_n| = l$

Exemple 11.2.1 ... 

Étudier la convergence de la suite (U_n) définie par : $U_n = \frac{n^2 - 1}{2n^2 + 1}$

NB :

- Une suite géométrique de raison q tel que $|q| < 1$ ou $-1 < q < 1$ converge toujours vers 0.
- Toute suite non convergente est divergente.

Propriété 11.2.1 ✿

- Toute suite convergente admet une limite **unique**.
- Toute suite convergente est bornée (La réciproque est fausse).

Contre exemple : $U_n = (-1)^n$

- Toute suite croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) est **convergente**.
- Soient (U_n) et (V_n) deux suites quelconques telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n$
 - Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$.
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} V_n = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$.

11.2.3 Suites de référence

Comparaison de suites de termes a^n et n^α

Suites	Conditions	Limites
$a^n, a \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}$	$a \leq -1$	Pas de limite
	$ a < 1$	0
	$a = 1$	1
	$a > 1$	$+\infty$
$n^\alpha, a \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}$	$\alpha < 0$	0
	$\alpha = 0$	1
	$\alpha > 0$	$+\infty$

Suite définie par récurrence

Propriété 11.2.2 ❁

Soit U_n une suite dont le terme général vérifie $U_{n+1} = f(U_n)$ où f est une fonction.

Si la suite (U_n) converge vers un réel l et que f est continue en l alors $f(l) = l$.

NB : Toute solution de l'équation $f(x) = x$ est appelée **point fixe** de la fonction f . L'existence d'un point fixe pour une fonction f ne prouve pas que la suite $(U_n)/U_{n+1} = f(U_n)$ converge.

Exercice 11.2.1 ...

1. On considère l'équation $\ln(x+3) = x$. Démontrer que cette équation admet dans $\mathbb{R}_+$ une solution unique $\alpha \in [1, 2]$.
2. On désigne par $f : x \mapsto \ln(x+3)$ et par $K = [1, 2]$
 - (a) Démontrer que $f(K) \subset K$.
 - (b) Démontrer que pour tout $x \in K$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.
3. Soit (U_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \ln(U_n + 3) \end{cases} \quad \forall n \geq 0.$$
 - (a) Montrer que $\forall n, U_n \in K$.
 - (b) Démontrer que par l'inégalité des accroissements finis et par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |U_0 - \alpha|$$

Troisième partie

ORGANISATION DES DONNÉES

CHAPITRE 12

DÉNOMBREMENT

Sommaire

12.1	Ensembles finis	118
12.1.1	Intersection de deux ensembles	118
12.1.2	Réunion de deux ensembles	119
12.1.3	Complémentaire d'un sous ensemble	119
12.1.4	Produit cartésien de deux ensembles	120
12.1.5	Parties d'un ensemble	120
12.2	Analyse combinatoire	121
12.2.1	Nombre d'applications d'un ensemble fini E dans un ensemble fini F	121
12.2.2	Arrangement	121
12.2.3	Permutation	122
12.2.4	Combinaison	122
12.2.5	Formule du binôme de newton	122

Objectifs pédagogiques

L'élève doit être capable de :

- ☞ Établir un arbre de choix pour dénombrer.
- ☞ Reconnaître face à une situation concrète si la modélisation fait appel à
 - Une application d'un ensemble fini dans un ensemble fini (reconnaître si cette application est injective voir bijective).
 - Un sous ensemble à p éléments d'un ensemble fini.
 - un arbre de choix.
- ☞ Calculer le nombre :
 - D'applications d'un ensemble de p éléments dans un ensemble de n éléments.
 - D'applications injectives d'un ensemble de p éléments dans un ensemble de n éléments ($p \leq n$).
 - De bijections d'un ensemble de n éléments dans un ensemble de n éléments.
 - De sous ensemble de p éléments dans un ensemble de n éléments ($p \leq n$).
- ☞ Calculer avec les nombres : $A_n^p, n!, C_n^p$.
- ☞ Écrire quelques lignes du triangle de Pascal.
- ☞ Développer $(a + b)^n$.

12.1 Ensembles finis

DÉFINITION 12.1.1 ✿

On appelle ensemble fini, tout ensemble dont les éléments peuvent être comptés. Soit A un ensemble fini. On appelle cardinal de A , le nombre d'élément de A . il est noté $\text{Card}(A)$.

N.B : $\text{Card}(\emptyset) = 0$.

12.1.1 Intersection de deux ensembles

DÉFINITION 12.1.2 ✿

Soient A et B deux ensembles. On appelle intersection de A et B , l'ensemble des éléments qui sont à la fois dans A et dans B . On la note $A \cap B$ et on lit A inter B .

$$A \cap B = \{x/x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Remarque 12.1.I

Si $A \cap B = \emptyset$ alors on dit que A et B sont **disjoints**.

12.1.2 Réunion de deux ensembles

DÉFINITION 12.1.3 ✿

Soient A et B deux ensembles. On appelle réunion de A et B , l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à A soit à B . On la note $A \cup B$ et on lit A union B .

$$A \cup B = \{x/x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Propriété 12.1.1 ✿

A et B étant deux ensembles finis, on a :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

Démonstration: facile

De plus, si A et B sont disjoints alors $\text{Card}(A \cap B) = 0$ et $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.

12.1.3 Complémentaire d'un sous ensemble

- Soit E un ensemble et soit A un autre ensemble. On dit que A est inclus dans E ou que A est un sous ensemble de E si tous les éléments de A se retrouvent dans E . On note $A \subset B$.

$$A \subset B \text{ signifie que } \forall x \in A; x \in E$$

- Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E . on appelle complémentaire de A dans E l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A . On le note C_E^A ou $\overline{A}$ et on a :

$$\overline{A} = \{x \in E/x \notin A\}$$

Exemple 12.1.1 ... 

$$E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\} \quad ; \quad A = \{1; 2; 5\} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{A} = \{0; 3; 4; 6; 7\}$$

Remarque 12.1.II

Si E est fini alors :

$$\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$$

12.1.4 Produit cartésien de deux ensembles

DÉFINITION 12.1.4 ✿

Soient $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ deux ensembles. On appelle produit cartésien de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$, l'ensemble des couples $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tels que $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ et $\mathbf{y} \in \mathbf{F}$. On le note $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$ et on lit $\mathbf{E}$ croix $\mathbf{F}$. Si $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ sont des ensembles finis, alors :

$$\text{Card}(\mathbf{E} \times \mathbf{F}) = \text{Card}(\mathbf{E}) \times \text{Card}(\mathbf{F})$$

On généralise sur n ensembles $\mathbf{E}_1; \mathbf{E}_2; \mathbf{E}_3; \dots; \mathbf{E}_n$ et on a :

$$\text{Card}(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 \times \mathbf{E}_3 \times \dots \times \mathbf{E}_n) = \text{Card}(\mathbf{E}_1) \times \text{Card}(\mathbf{E}_2) \times \text{Card}(\mathbf{E}_3) \times \dots \times \text{Card}(\mathbf{E}_n)$$

12.1.5 Parties d'un ensemble

DÉFINITION 12.1.5 ✿

Soit $\mathbf{E}$ un ensemble. On appelle partie de $\mathbf{E}$ tout sous-ensemble de $\mathbf{E}$.

Si $\mathbf{E}$ est fini alors l'ensemble des parties de $\mathbf{E}$ est noté $\mathcal{P}(\mathbf{E})$ et $\text{Card}(\mathcal{P}(\mathbf{E})) = 2^{\text{Card}(\mathbf{E})}$.

Exemple 12.1.2 ... 📁

$$\mathbf{E} = \{a; b; c\} \implies \mathcal{P}(\mathbf{E}) = \{\emptyset; \{a\}, \{b\}; \{c\}; \{a, b\}; \{a, c\}; \{b, c\}; \{a, b, c\}\}$$
$$\text{Card}(\mathcal{P}(\mathbf{E})) = 2^{\text{Card}(\mathbf{E})} = 2^3 = 8$$

Exercice 12.1.1 ... 📁

Dans une classe de 25 élèves, 10 jouent au basketball, 17 jouent au football et 8 pratiquent les deux sports. Déterminer le nombre de personnes :

1. Qui pratiquent uniquement au football
2. Qui pratiquent uniquement au basketball
3. Qui ne pratiquent aucun sport

12.2 Analyse combinatoire

12.2.1 Nombre d'applications d'un ensemble fini E dans un ensemble fini F

Nombre de p -uplet d'un ensemble fini

DÉFINITION 12.2.1 ✿

Soit E un ensemble fini à n éléments et soit p un entier non nul tel que $p \leq n$. On appelle p -uplet (ou p -liste) de E toute suite $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_p)$ d'éléments de E . Les x_i peuvent être distincts ou non.

Exemple 12.2.1 ...

$E = \{a; b; c; d\} \implies (a; b)$ est un 2-uplet de E . $(a; a)$ est aussi un 2-uplet de E .

Remarque 12.2.I

- Le nombre d'application d'un ensemble E vers un ensemble F est : $(\text{Card}(F))^{\text{Card}(E)}$.
- Le nombre de p -listes d'un ensemble fini E à n éléments est n^p .

12.2.2 Arrangement

DÉFINITION 12.2.2 (FACTORIEL) ✿

Soit n un nombre entier naturel. On appelle factoriel de n le nombre entier naturel noté $n!$ tel que

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1$$

Par convention $0! = 1$ et $1! = 1$.

DÉFINITION 12.2.3 (ARRANGEMENT) ✿

Soit E un ensemble de cardinal n . On appelle arrangement de p élément de E ($1 \leq p \leq n$), tout p -uplet $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_p)$ d'éléments de E deux à deux distincts. Le nombre d'arrangements de p éléments de E est aussi le nombre d'injections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments. Il est noté A_n^p et on a

$$A_n^p = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - p + 1) = \frac{n!}{(n - p)!}$$

Par convention $0! = 1$ et $1! = 1$.

12.2.3 Permutation

DÉFINITION 12.2.4 ✿

On appelle permutation des éléments de E , tout arrangement de tous les n éléments de E . c'est aussi une bijection d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à n éléments.

Le nombre de permutations d'un ensemble de n éléments est donc le nombre de bijections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à n éléments. Il est égal au factoriel de n .

12.2.4 Combinaison

DÉFINITION 12.2.5 ✿

On appelle combinaison de p ($1 \leq p \leq n$), éléments de E , toute partie de E possédant p éléments.

Le nombre de combinaison de p éléments de E est donc le nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments. Il est noté C_n^p (à ne pas confondre avec le complémentaire d'un ensemble). On a :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$$

Le nombre de parties d'un ensemble non vide de n éléments est 2^n .

Remarque 12.2.II

On démontre que $C_n^1 = n$; $C_n^0 = 1$; $C_n^{n-p} = C_n^p$ et $C_{n-1}^{p-1} = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$.

12.2.5 Formule du binôme de newton

Propriété 12.2.1 ✿

Pour tous nombres complexes a et b et pour tout entier non nul n ,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

Exercice 12.2.1 ... ✎

Un sac contient 26 jetons représentant les 26 lettres de l'alphabet français dont 20 consonnes et 6 voyelles.

1. On tire simultanément 5 jetons du sac
 - (a) Déterminer le nombre total de tirage possible.

- (b) Déterminer le nombre de tirage contenant que des consonnes.
 - (c) Déterminer le nombre de tirage contenant exactement **2** voyelles.
 - (d) Déterminer le nombre de tirage contenant au moins **une** voyelle.
2. On tire successivement **5** jetons du sac sans remise
- (a) Déterminer le nombre total de tirage possible.
 - (b) Déterminer le nombre de tirage contenant que des consonnes.
 - (c) Déterminer le nombre de tirage contenant exactement **2** voyelles.

Exercice 12.2.2 ...

Une urne contient 12 cartes portant une lettre de l'alphabet de telle sorte que mise bout à bout l'on obtienne le mot « **REMPLACEMENT** ».

On tire au hasard et simultanément 3 cartes de l'urne.

Déterminer le nombre de possibilités de tirer :

1. Les trois lettres du mot *MER*.
2. Exactement une fois la lettre *E* et une consonne.
3. Exactement 2 consonnes.
4. Au moins une voyelle.

CHAPITRE 13

PROBABILITÉS

Sommaire

13.1 Vocabulaire des évènements	125
13.1.1 Expérience aléatoire ou Épreuve	125
13.1.2 Univers	125
13.1.3 Évènement	125
13.1.4 Événualité	126
13.1.5 Évènement élémentaire	126
13.1.6 Évènement certain	126
13.1.7 Évènement incertain	126
13.1.8 Évènement impossible	126
13.1.9 Évènements incompatibles	127
13.2 Probabilité d'un événement	127
13.3 Équiprobabilité	127
13.3.1 Quelques exemples de calcul de probabilités	128
13.4 Probabilité conditionnelle	129
13.4.1 Définition et propriétés	129
13.4.2 Probabilités totales	130
13.4.3 Formule de probabilités totales	131
13.4.4 Utilisation de d'arbres de probabilité ou arbres pondérés pour le calcul de probabilités conditionnelles	131
13.5 Variable aléatoire	132
13.5.1 Loi de probabilité	132
13.5.2 Fonction de répartition	133
13.5.3 Espérance mathématique	133
13.5.4 Variance	134
13.5.5 Écart-type	134
13.6 Épreuve de Bernoulli – loi binomiale	134
13.6.1 Épreuve de Bernoulli	134
13.6.2 Loi binomiale	135
13.7 Exercices d'entraînement	136

Objectifs pédagogiques

L'élève doit être capable de :

- ☞ Dénombrer (savoir-faire de première)
- ☞ Calculer à partir des dénombrements la probabilité d'un événement lié à des éventualités équiprobable (cas favorables, cas possibles).
- ☞ Déterminer par une variable aléatoire donnée : sa loi de probabilité, sa fonction de répartition, son espérance mathématique, sa variance, son écart-type.
- ☞ Déterminer la probabilité conditionnelle d'un événement.
- ☞ Reconnaître deux événements indépendants.
- ☞ Reconnaître une loi binomiale et utiliser ses propriétés.

13.1 Vocabulaire des événements

13.1.1 Expérience aléatoire ou Épreuve

DÉFINITION 13.1.1 ❀

Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat.

Exemple 13.1.1 ...☞

1. Un garçon a enceinté une fille. (on ne peut pas prévoir le sexe de l'enfant dans les premiers mois).
2. Le jet d'un dé parfait à 6 faces. (on ne peut pas prévoir le numéro de face supérieure)

13.1.2 Univers

DÉFINITION 13.1.2 ❀

L'univers est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire. On le note très souvent Ω .

Exemple 13.1.2 ...☞

En reprenant l'exemple 2, Ω est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

13.1.3 Évènement

DÉFINITION 13.1.3 ❀

On appelle évènement, une partie de Ω .

Exemple 13.1.3 ...☞

Soit A , l'évènement "obtenir des nombres pairs" lors d'un jet de dé à 6 faces.

13.1.4 Événement

DÉFINITION 13.1.4 ✿

Une éventualité est un résultat possible d'une expérience aléatoire.

Exemple 13.1.4 ... 📌

On lance un dé bien équilibré à six faces. On a au total six (06) éventualités : 1; 2; 3; 4; 5, 6.

13.1.5 Évènement élémentaire

DÉFINITION 13.1.5 ✿

Un évènement est dit élémentaire s'il ne contient qu'une seule éventualité.

Exemple 13.1.5 ... 📌

Soit B , l'évènement "obtenir un nombre premier et pair lors du jet de dé non pipé", $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ donc $B = \{2\}$ est un évènement élémentaire.

13.1.6 Évènement certain

DÉFINITION 13.1.6 ✿

Un évènement certain est un évènement qui contient tous les résultats d'une expérience aléatoire. Ω est l'évènement certain.

13.1.7 Évènement incertain

DÉFINITION 13.1.7 ✿

Un évènement incertain est un évènement dont on ne connaît pas le résultat. Ω est l'évènement certain.

13.1.8 Évènement impossible

DÉFINITION 13.1.8 ✿

Un évènement impossible est un évènement dont on peut pas réaliser lors d'une expérience aléatoire.

Exemple 13.1.6 ... 📌

Obtenir le chiffre 7 lors d'un jet de dé à 6 face est un évènement impossible.

13.1.9 Évènements incompatibles

DÉFINITION 13.1.9 ❀

Deux évènements sont incompatibles lorsque les deux résultats ne se réalisent pas ensemble. Ainsi deux évènements sont incompatibles lorsque les deux se réalisent ensemble.

13.2 Probabilité d'un événement

DÉFINITION 13.2.1 ❀

Soit Ω l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire et $P(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω . On appelle probabilité définie sur $P(\Omega)$ toute application : $P : P(\Omega) \longrightarrow [0; 1]$ et vérifiant :

♠ $P(\Omega) = 1.$

♠ $P(\emptyset) = 0.$

♠ Pour tout événement $A = \{e_1; e_2; \dots; e_n\}$; on a :

$$P(A) = P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \dots + P(\{e_n\}) = \sum_{k=1}^n P(\{e_k\}).$$

Propriété 13.2.1 ❀

♠ La somme des probabilités de tous les événements élémentaires de l'univers est égale à 1.

♠ A et B étant deux événements d'un même univers, on a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

♠ Si A et B sont deux événements incompatibles alors $P(A \cap B) = 0$ et $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

♠ Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$.

♠ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

13.3 Équiprobabilité

DÉFINITION 13.3.1 ❀

Soit l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. On dit que cette expérience a lieu dans un cadre d'équiprobabilité des événements élémentaires lorsque tous les événements élémentaires ont la même chance d'apparition (même probabilité).

Dans le cas d'équiprobabilité, pour tout événement A , on a :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

Remarque 13.3.I

Des expressions comme dés ou pièces de monnaie **parfaitement équilibrés** ; **non truqués** ; **non tronqués** ; **boules indiscernables au touché** et **on tire au hasard**, traduisent une équiprobabilité.

13.3.1 Quelques exemples de calcul de probabilités

Exemple 13.3.1 (LANCÉ DE DÉ) ...

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :

- A : "obtenir un nombre pair".
- B : "obtenir un nombre inférieur ou égal à 4".

Exemple 13.3.2 (JEU DE CARTES) ...

On tire au hasard une carte dans un jeu de **32** cartes comprenant **4** "couleurs" ! le pique ; le trèfle ; le carreau et le cœur. Chaque "couleur" est composée de **8** cartes : l'As, le roi, la dame, le valet, le 10, le 9, le 8 et le 7.

Quelle est la probabilité de tirer : un trèfle ; un roi ; l'As de pique ; une carte rouge ? (le pique et le trèfle sont noirs tandis que le carreau et le cœur sont rouges).

Exemple 13.3.3 (TIRAGE SIMULTANÉ) ...

Un sac contient neuf boules indiscernables au touché dont 5 rouges et 4 noires. On tire simultanément et au hasard 3 boules du sac et on note leurs couleurs. Calculer les probabilités des événements suivants :

- A : "les trois boules tirées contiennent une boule rouge".
- B : "les trois boules tirées contiennent au moins deux boules rouges".
- C : "les trois boules tirées contiennent au plus deux boules rouges".

Exemple 13.3.4 (TIRAGE AVEC REMISE) ...

Un sac contient sept boules indiscernables au touché dont 3 rouges R_1 ; R_2 et R_3 et 4 noires N_1 ; N_2 ; N_3 et N_4 . On tire au hasard une boule du sac ; on note sa couleur, on la remet dans le sac, puis on tire au hasard une deuxième boule, on note sa couleur. Calculer les probabilités des événements suivants :

- A : "les deux boules tirées sont de couleurs différentes".
- B : "les deux boules tirées sont de même couleur".

Exemple 13.3.5 (TIRAGE SANS REMISE) ...

Un sac contient sept boules indiscernables au touché dont 3 rouges R_1 ; R_2 et R_3 et 4 noires N_1 ; N_2 ; N_3 et N_4 . On tire au hasard une boule du sac on note sa couleur, on ne la remet pas, puis on tire une seconde boule on note aussi sa couleur, puis une troisième boule. Calculons les probabilités des événements suivants :

- A : "les trois boules tirées contiennent une boule noire et deux boules rouges".
- B : "les trois boules tirées sont toutes noires".
- C : "les trois boules tirées contiennent au plus deux boules rouges".

Exemple 13.3.6 (DÉ CUBIQUE TRUQUÉ) ...

On lance un dé cubique parfaitement équilibré dont une face est marquée 1 ; deux faces marquées 2 et trois faces marquées 3. On note le chiffre obtenu sur la face supérieure du dé. Quelle est la probabilité d'obtenir 1 ? ; 2 ? ; 3 ?

Exemple 13.3.7 (DÉ CUBIQUE PIPE) ...

On lance un dé cubique pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Le dé est pipé de manière que les chiffres 1 et 3 ont la même chance d'apparition ; les chiffres 2 ; 4 et 6 ont la même chance d'apparition. La probabilité d'obtenir le chiffre 1 est le double de celui d'obtenir le chiffre 2 est le quart de celui d'obtenir le chiffre 5. Soit A événementiel : "obtenir un nombre pair". Calculer $P(A)$.

13.4 Probabilité conditionnelle

13.4.1 Définition et propriétés

ACTIVITÉ 13.4.1

On étudie les habitudes nutritionnelles d'une population de 80 personnes composées de 42 personnes de sexe féminin et de 38 personnes de sexe masculin. 30 personnes de sexe masculin sont végétariennes et 15 de sexe féminin le sont.

- On choisit une personne au hasard. Calculer les probabilités des événements suivants :
 - A : "la personne choisie est de sexe féminin".
 - B : "la personne choisie est de sexe masculin".
 - C : "la personne choisie est végétarienne".
 - D : "la personne choisie n'est pas végétarienne".

	Sexe féminin	Sexe masculin	Totaux
Végétariens	15	30	45
Non végétariens	27	8	35
Totaux	42	38	80

- On choisie maintenant au hasard une personne de sexe féminin et on veut étudier la probabilité pour que la personne soit végétarienne.

On a un enchaînement de deux expériences aléatoires : "choisir une personne de sexe féminin" puis "la personne choisie est végétarienne".

On calcule ainsi la probabilité d'être végétarien sachant qu'on est de sexe féminin qu'on note $P_A(C)$ ou $P(C/A)$.

$$\text{On a : } P(C/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{15}{80}}{\frac{38}{80}} = \frac{15}{38}.$$

DÉFINITION 13.4.1

Soit Ω l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire ; A un événement de probabilité non nul. L'application qui à tout événement B associe le nombre réel

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ est une probabilité sur Ω . elle est appelée **probabilité conditionnelle** sachant que A est réalisé ou tout simplement probabilité sachant A . on la note aussi $P(B/A)$.

Remarque 13.4.I

- $P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}.$
- On constate que : $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A).$

DÉFINITION 13.4.2 ✿

Deux événements A et B sont dits indépendants en probabilité lorsque la réalisation de l'un n'est pas modifiée par la réalisation de l'autre et vice versa.

Si A et B sont indépendants en probabilité alors :

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A)$$

Dans ce cas, $P_A(B) = \frac{A \cap B}{P(A)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(A)} = P(B).$

Exemple 13.4.1 ... 📁

On lance successivement deux dés cubiques parfaitement équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Sachant que le chiffre luit sur la face supérieure du premier dé est inférieur à 3, quelle est la probabilité pour que la somme des deux chiffres paire.

Résolution 13.4.1 ✿

Le lancé d'un dé n'a pas d'influence sur le lancé de l'autre dé donc il y a indépendance entre les deux événements. Soit A l'événement "la somme des deux chiffres est paire". On a

$$P(A) = P_1(\{1\}) + P_1(\{3\}) + P_1(\{5\}) + P_2(\{2\}) + P_2(\{4\}) + P_2(\{6\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

13.4.2 Probabilités totales

DÉFINITION 13.4.3 (PARTITION D'UN ENSEMBLE) ✿

Soit Ω l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire et $A_1; A_2; \dots; A_n$ des événements de Ω . On dit que $A_1; A_2$ et A_3 forment une partition de Ω si

- Tous ces événements sont non vides.
- Les événements sont deux à deux disjoints i.e $\forall i, j; A_i \cap A_j = \emptyset$.
- La réunion de tous les événements donne l'événement certain $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$.

Exemple 13.4.2 ... 📁

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; $A_1 = \{1; 3\}$; $A_2 = \{2; 4; 5\}$; $A_3 = \{6\} \implies A_1, A_2$ et A_3 forment une partition de Ω . car :

- $A_1 \neq \emptyset, A_2 \neq \emptyset$ et $A_3 \neq \emptyset$.
- $A_1 \cap A_2 = \emptyset$; $A_1 \cap A_3 = \emptyset$; $A_2 \cap A_3 = \emptyset$.
- $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$.

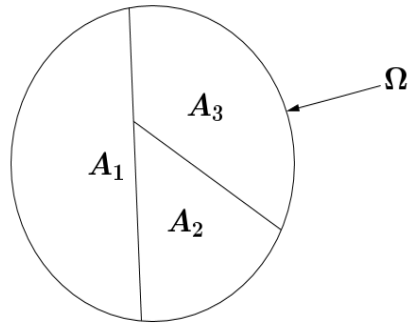


FIGURE 13.1 – Illustration de partition d'ensembles

13.4.3 Formule de probabilités totales

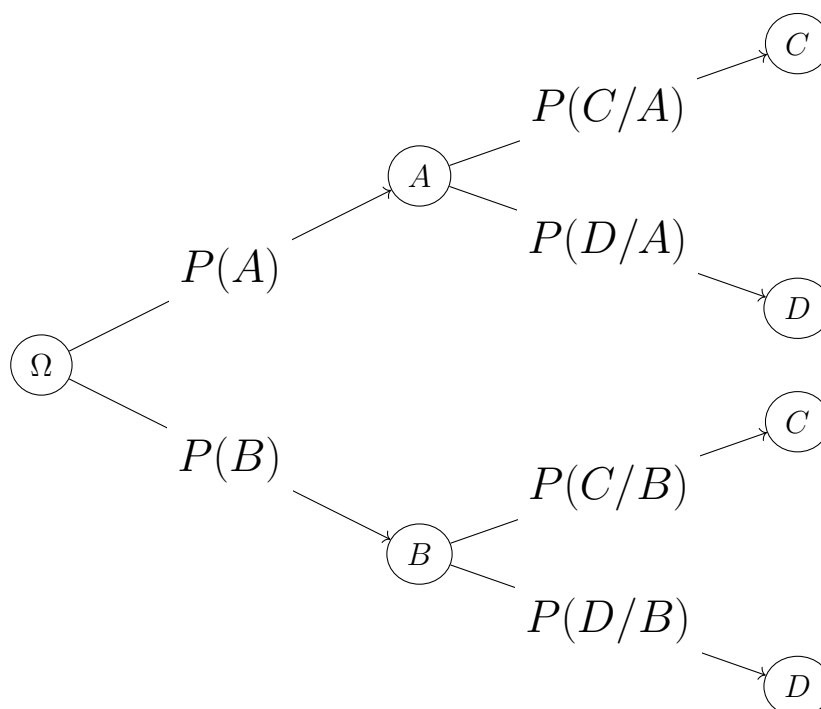
Soit $B_1, B_2; \dots; B_n$ une partition de Ω . Pour tout événement A ,

- $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n)$.
- $\forall; 1 \leq i \leq n; P(A \cap B_i) = P_{B_i}(A) \times P(B_i)$.

13.4.4 Utilisation de d'arbres de probabilité ou arbres pondérés pour le calcul de probabilités conditionnelles

Pour le calcul de probabilités conditionnelles, on utilise souvent un arbre dit arbre pondéré. Sa construction suit les normes suivantes :

- A chaque niveau de l'arbre les événements forment une partition de l'univers.
- A partir du second niveau, les probabilités des branches sont des probabilités conditionnelles.
- La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités des branches.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y conduisent.



En suivant les normes ci-dessus, on obtient les interprétations suivantes :

- $P(A \cup C) = P(A) \times P(C/A)$; $P(A \cup D) = P(A) \times P(D/A)$; $P(B \cup C) = P(B) \times P(C/B)$ et $P(B \cup D) = P(B) \times P(D/B)$.
- C et D formant une partition de A et B séparément, d'après la règle de probabilité totale, on obtient : $P(A) = P(A \cup C) + P(A \cup D)$ et $P(B) = P(B \cup C) + P(B \cup D)$.

13.5 Variable aléatoire

13.5.1 Loi de probabilité

DÉFINITION 13.5.1 ✿

Lorsqu'à chaque éventualité d'une expérience aléatoire, on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une variable aléatoire numérique X .

Ainsi, Ω est l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire alors X est une application de $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. L'événement " X prend la valeur x_i " est noté $(X = x_i)$.

Exemple 13.5.1 ... 🎲

Un joueur lance un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. S'il obtient sur la face supérieure du dé l'un des chiffres 1 ; 2 ou 3 il perd 100f ; s'il obtient 4, il gagne 200f et s'il obtient 5 ou 6, il ne gagne ni ne perd rien.

On a ainsi défini une variable aléatoire X qui à un chiffre obtenu sur la face supérieure du dé associe le gain du joueur.

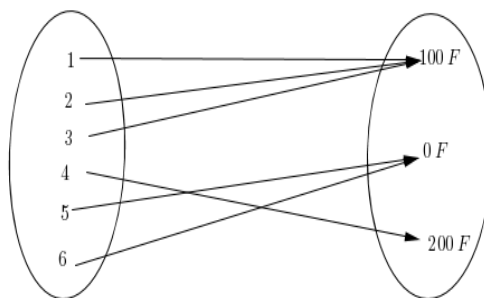


FIGURE 13.2 – Esquisse du jeu

DÉFINITION 13.5.2 ✿

On définit la loi de probabilité de la variable aléatoire X (ou la distribution de X) lorsqu'à chaque valeur prise par la variable aléatoire X , on associe la probabilité P_i de l'événement $X = x_i$. On la représente par un tableau :

X_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P[X = x_i]$	P_1	P_2	$\dots$	P_n

Exemple 13.5.2 ...

Dans notre exemple la loi de probabilité est définie par :

X_i	-100	0	200
$P[X = x_i]$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

13.5.2 Fonction de répartition

DÉFINITION 13.5.3 ✱

On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X , l'application

$$F: \mathbb{R} \longrightarrow [0; 1]$$
$$x \longmapsto P[X \leq x] \text{ . On obtient la formule explicite :}$$

- Pour $x < x_1$; $F(x) = 0$.
- Pour $x_i \leq x \leq x_{i+1}$; $F(x) = F(x_{i+1}) + P[X = x_i]$.
- Pour $x = x_n$; $F(x) = 1$.

Exemple 13.5.3 ...

Par rapport à l'exemple précédent, On a : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{Pour } x < -100 \\ \frac{1}{2} & \text{Pour } -100 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} & \text{Pour } 0 \leq x < 200 \\ 1 & \text{Pour } x \geq 0 \end{cases}$.

13.5.3 Espérance mathématique

DÉFINITION 13.5.4 ✱

X étant une variable aléatoire prenant des valeurs de probabilités respectives ; on appelle espérance mathématique de X , le nombre réel noté $E(X)$ et défini par :

$$E(X) = x_1 P_1 + x_2 P_2 + \cdots + x_n P_n = \sum_{i=1}^n x_i P_i.$$

Remarque 13.5.I

Dans un jeu,

- Si $E(X) > 0$ alors le jeu est *avantageux* pour le joueur.
- Si $E(X) < 0$ alors le jeu est *désavantageux* pour le joueur.
- Si $E(X) = 0$ alors le jeu est *équitable*.

Exemple 13.5.4 ...

Calculer l'espérance mathématique de l'exemple (13.5.1).

13.5.4 Variance

DÉFINITION 13.5.5 ✿

On appelle variance d'une variable aléatoire X le nombre réel noté $V(X)$ et défini par :

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left(X - E(X)\right)^2 \\ &= E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 \end{aligned}$$

13.5.5 Écart-type

DÉFINITION 13.5.6 ✿

On appelle écart-type de X le nombre réel noté $\sigma(X)$ défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

13.6 Épreuve de Bernoulli – loi binomiale

:

13.6.1 Épreuve de Bernoulli

DÉFINITION 13.6.1 ✿

On appelle épreuve de Bernoulli toute expérience aléatoire qui conduit seulement à deux éventualités ; l'une appelée **succès** de probabilité p et l'autre appelée **échec** de probabilité q tel que $q = 1 - p$.

On appelle d'une épreuve de Bernoulli, la probabilité du succès.

Exemple 13.6.1 ...

Le lancé d'une pièce de monnaie. On attend toujours à voir une face parmi deux, souvent appelée **Face** et **Pile**.

13.6.2 Loi binomiale

DÉFINITION 13.6.2 ❀

On appelle **schéma de Bernoulli**, toute suite de n épreuves de Bernoulli ; identiques et indépendantes.

On appelle **paramètres** du schéma de Bernoulli, le nombre n de d'épreuves de Bernoulli réalisées et la probabilité p du succès.

Propriété 13.6.1 ❀

Soit un schéma de Bernoulli ;

- n est le nombre de répétition de l'épreuve de Bernoulli dans ce schéma.
- p la probabilité du succès.
- $q = 1 - p$ celle de l'échec.
- X la variable aléatoire qui associe le nombre k de succès du schéma.

DÉFINITION 13.6.3 ❀

La loi de probabilité de X est définie par $P(X) = C_n^k p^k q^{n-k}$. C'est la loi bino-

miale de paramètres n et p . Elle a pour espérance mathématique $E(X) = np$ et

pour variance $V(X) = npq$.

13.7 Exercices d'entraînement

Exercice 13.7.1 ...

Dans un lycée général et technologique, il y a 1 400 lycéens : des élèves de seconde, première ou terminale, et des étudiants en Section de Technicien Supérieur (STS). Pour pouvoir disposer des collections de manuels scolaires, tous les lycéens doivent adhérer à la coopérative scolaire et payer une location annuelle d'un montant de 50 000^F (pour les élèves) et 60 000^F (pour les étudiants). Sur l'ensemble des adhérents à la coopérative scolaire, 62,5% sont les élèves de seconde, première ou terminale. Les autres sont les étudiants de STS. Depuis quelques années, les élèves de seconde, première ou terminale disposent de chèques-lire avec lesquels ils peuvent régler cette location :

- 40 % paient leur location à l'aide de chèques-lire,
- 56 % paient par chèque bancaire,
- les autres paient par mandat ou en liquide.

Les étudiants de STS ne disposent pas de chèques-lire :

- 96 % paient par chèque bancaire,
- les autres paient par mandat ou en liquide.

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I

Les 1 400 lycéens, élèves comme étudiants, adhèrent à cette coopérative.

- 1./ Calculer le montant des versements effectués par chèque bancaire.
- 2./ Calculer le pourcentage du montant total des locations que cette somme représente.

Partie II

On prend au hasard la fiche d'un adhérent à la coopérative scolaire parmi les 1 400 fiches. On note :

- **L** l'évènement « l'adhérent est un élève » ;
- **E** l'évènement « l'adhérent est un étudiant en STS » ;
- **C** l'évènement « l'adhérent paie avec ses chèques-lire » ;
- **B** l'évènement « l'adhérent paie avec un chèque bancaire » ;
- **A** l'évènement « l'adhérent paie par un autre moyen de paiement ».

- 1./ Traduire à l'aide d'un arbre pondéré la situation décrite ci-dessus.
- 2./ a./ Calculer la probabilité que l'adhérent soit un élève ayant payé sa location à l'aide de chèques-lire.

b./ Calculer la probabilité que l'adhérent soit un étudiant en STS ayant payé sa location à l'aide d'un chèque bancaire. 0.25

c./ Démontrer que la probabilité que l'adhérent ait payé par chèque bancaire est de 0,71.

- 3./ Un adhérent a payé par chèque bancaire. Calculer la probabilité que ce soit un élève.

Exercice 13.7.2 ...

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher dont 3 noires, 2 blanches et 5 rouges. On tire simultanément 3 boules de l'urne. On note :

1. A : « Le tirage comporte exactement deux boules noires. ».
2. B : « le tirage comporte une boule de chaque couleur ».
3. C : « le tirage comporte au moins une boule rouge ».

Calculer la probabilité de ces événements.

Exercice 13.7.3 ...

Un sac contient 3 jetons blancs ; 2 jetons rouges ; et 5 jetons verts indiscernables au toucher.

Une épreuve consiste à tirer simultanément 3 jetons du sac. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

1. A : « les trois jetons tirés sont de la même couleur. ».
2. B : « les trois jetons tirés sont de 3 couleurs différentes ».
3. C : « au moins 2 jetons tirés sont de la même couleur ».

Exercice 13.7.4 ...

Une urne contient six boules blanches et quatre boules noires.

1. On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
 - (a) A : « tirer deux boules de même couleur. ».
 - (b) B : « tirer deux boules de couleur différentes ».
 - (c) C : « Tirer au moins une boule blanche ».
2. On tire successivement sans remise et au hasard, deux boules de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
 - (a) D : « tirer dans l'ordre une boule blanche puis une boule noire. ».

- (b) E : « tirer une boule blanche et une boule noire ».
- (c) F : « tirer deux boules de couleurs différentes ».

Exercice 13.7.5 ...

On lance deux dés cubiques équilibrés. On calcule la valeur absolue de la différence des points obtenus sur la face supérieure de chaque dé. Par exemple si l'on obtient « 2 » avec un dé et « 5 » avec l'autre, le résultat correspondant est : $|2 - 5| = 3$.

- Quels sont les différents résultats possibles ? (on peut utiliser un tableau à double entrées)
- Quelle est la probabilité d'obtenir chacun de ces résultats ?

Exercice 13.7.6 ...

Un sac contient 10 jetons numérotés de 1 à 10. On tire simultanément 2 jetons au hasard.

- Déterminer le nombre de tirages possibles.
- Calculer la probabilité :
 - P pour que la différence entre les deux numéros tirés soit égale à 4.
 - P' pour que la somme des deux numéros tirés soit égale à 10 et que leur différence soit égale à 4.

Exercice 13.7.7 ...

Une urne contient 6 boules, 2 noires et 4 blanches. Le tirage d'une boule noire rapporte 20 francs et le tirage d'une boule blanche ne rapporte rien.

- Au cours d'un premier jeu, on extrait au hasard et simultanément 2 boules de l'urne. Calculer les probabilités des événements :
 - A : « ne rien gagner au cours du tirage effectué ».
 - B : « gagner au moins 20 francs au cours du tirage effectué ».
- Au cours d'un deuxième jeu, on extrait au hasard successivement avec remise 4 boules de l'urne. Calculer les probabilités des événements :
 - A' : « ne rien gagner au cours des 4 tirages effectué ».
 - B' : « gagner exactement 20 francs au cours des 4 tirages effectués ».

- Au cours d'un troisième jeu, on extrait au hasard successivement sans remise 3 boules de l'urne. Calculer les probabilités des événements :

- A'' : « ne rien gagner au cours des 3 tirages effectué ».
- B'' : « gagner au plus 20 francs au cours des 3 tirages effectués ».

Exercice 13.7.8 ...

Une urne contient une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, trois boules numérotées 3 et quatre boules numéros 4. Les boules sont indiscernables au toucher. On tire une boule de l'urne.

On note : P_1 la probabilité de tirer une boule portant le numéro 1, P_2 la probabilité de tirer une boule portant le numéro 2, P_3 la probabilité de tirer une boule portant le numéro 3, P_4 la probabilité de tirer une boule portant le numéro 4.

- Combien y-a-t-il de boules dans cette urne ?
- Calculer les probabilités P_1, P_2, P_3 et P_4 .
- Montrer que la suite $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
- On pose $Q_1 = e^{P_1}, Q_2 = e^{P_2}, Q_3 = e^{P_3}, Q_4 = e^{P_4}$.
Montrer que la suite $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
- On tire deux boules de l'urne et on désigne par :

A l'événement « les deux boules tirées portent le même numéro ».

Calculer la probabilité $P(A)$ de l'événement A dans chacun des cas suivants :

- ♣ 1^{er} cas : les deux boules sont tirées successivement sans remise de la première boule tirée avant le second tirage.
- ♣ 2^{ème} cas : les deux boules sont tirées successivement avec remise de la première boule tirée avant le second tirage.
- ♣ 3^{ème} cas : les deux boules sont tirées simultanément.

Exercice 13.7.9 ...

Un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 est truqué de telle manière que l'apparition du numéro 5 est deux fois "plus probable" que l'apparition des autres numéros.

- Calculer la probabilité d'apparition de chaque numéro.

2. Dans cette question, on supposera que :
 $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_6 = \frac{1}{7}$ et $P_5 = \frac{2}{7}$.
 Calculer les probabilités des événements suivants :

- (a) A : « *Obtenir un numéro pair* ».
 (b) B : « *Obtenir un numéro impair* ».

Exercice 13.7.10 ...

Un sac contient deux boules portant le numéro 1, trois boules portant le numéro 2 et cinq boules portant le numéro 3.

On tire au total deux boules : une, puis une deuxième qu'on place côte et côte. Calculer la probabilité des événements suivants :

- A : « *La somme des numéros marqués sur les deux boules est égale à 5* ».
- B : « *La somme des numéros marqués sur les deux boules est supérieure ou égale à 5* ».
- C : « *La somme des numéros marqués sur les deux boules est supérieure ou égale à 2* ».
- B : « *La somme des numéros marqués sur les deux boules est un nombre pair* ».

Exercice 13.7.11 ...

A la veille de CAN2004, le groupe industriel de Mr. KPOTUFE spécialisé dans la fabrication des ballons de foot a été sollicité pour fournir les ballons aux organisateurs de la CAN. Le service de contrôle fait savoir que deux types de défauts de fabrications apparaissent de façon récurrente.

Une étude minutieuse montre que :

- Cinq pour cent (5%) des ballons présentent le défaut de type C i.e $P(C) = 0.05$.
- Dans ce lot de ballons présentant le défaut C , on a décelé que huit pour cent (8%) ont le défaut de type E , i.e $P(E/C) = 0.08$
- Parmi les ballons ne présentant pas le défaut C , deux pour cent (2%) présentent le défaut E i.e $P(E/\bar{C}) = 0.02$.

Un ballon est en bon état s'il ne présente aucun des deux défauts.

- On prend au hasard un ballon. Quelle est la probabilité pour que
 - Le ballon présente les deux défauts ?
 - Le ballon présente le défaut E seulement ?
 - Le ballon présente le au moins un défaut ?

(d) Le ballon soit en bon état ?

(e) Le ballon présente soit le défaut C , soit le défaut E ?

- On choisit aléatoirement et avec remise dix (10) ballons du lot fourni. La probabilité pour que le ballon ne soit pas en bon état est : 0.069.

Calculer la probabilité pour que exactement deux (02) ballons soient en bon état.

Exercice 13.7.12 ...

Une population d'élève comportant 40% de bachelier a subi un test de recrutement en première année d'une grande école. Ce test a donné les résultats suivants :

- 75% des bacheliers sont admis.
- 52% des non bacheliers sont admis.

On choisit au hasard un élève de la population. On note :

- B l'événement : « *l'élève est bachelier* » ;
- T l'événement : « *l'élève est admis au test* » ;
- A l'événement : « *l'élève est bachelier et il est admis au test* ».

- Préciser chacune des probabilités suivantes :

- La probabilité $P(B)$ de l'événement B ;
- La probabilité $P_B(T)$ de T sachant que B est réalisé.
- La probabilité $P_{\bar{B}}(T)$ de T sachant que B n'est pas réalisé.

- Démontrer que la probabilité de l'événement A est égale à 0.3

- Calculer la probabilité de l'événement T .

- Déduire des questions précédentes que les événements B et T ne sont pas indépendantes.

- Démontrer que la probabilité pour qu'un élève admis au test soit bachelier est égale à $\frac{25}{51}$.

Exercice 13.7.13 ...

Une maladie atteint 30% d'une population donnée. Pour contrôler cette maladie, on a institué un test. On sait que :

- Si un sujet n'est pas malade, 9 fois sur 10 le test est négatif ;
- S'il est malade , 8 fois sur 10 le test est positif.

On désigne par M , l'événement « **le sujet est malade** » et par T , l'événement « **le test appliqué au sujet est positif** »

1. (a) Calculer la probabilité de l'événement « **le sujet est malade et le test est positif** »
- (b) Calculer la probabilité de l'événement « **le sujet n'est pas malade et le test est positif** »
- (c) En déduire la probabilité de l'événement « **avoir un test positif** »
2. Calculer la probabilité d'avoir un test négatif.
3. Sachant qu'un sujet a un test positif quelle est la probabilité qu'il soit malade ?
4. Calculer la probabilité d'être bien portant sachant que le test est négatif.

Exercice 13.7.14 ...

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 10^{-4} près. Lors d'une épidémie chez des bovins, un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1% est porteur de la maladie. Si un animal est porteur de la maladie, de test positif dans 85% des cas.

Si un animal est sain, le test est négatif dans 65% des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note M l'événement « **l'animal est porteur de la maladie** » et T l'événement « **le test est positif** ».

1. Traduire en termes de probabilité les données numériques de l'énoncé.
2. Un animal est choisi au hasard.
 - (a) Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
 - (b) Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0.058.
3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie.
4. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise.

On note X la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

- (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
- (b) Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ?

Exercice 13.7.15 ...

Un secteur de producteur d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel; les **ingénieurs**, les **opérateurs de production** et les **agents de maintenance**.

Il y a 8% d'ingénieurs et 80% d'opérateur de production. Les femmes représentent 50% des ingénieurs, 25% des agents de maintenance et 60% des opérateurs de production.

On interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise. On donne :

- M l'événement : « **le personnel interrogé est un agent de maintenance** ».
- O l'événement : « **le personnel interrogé est un opérateur de production** ».
- I l'événement : « **le personnel interrogé est un ingénieur** ».
- F l'événement : « **le personnel interrogé est une femme** ».

1. Construire un arbre pondéré correspondant aux données.
2. Calculer la probabilité d'interroger :
 - (a) Un agent de maintenance.
 - (b) Une femme agent de maintenance.
 - (c) Une femme.
3. Le service de maintenance effectue l'entretien de machines, mais il est appelé aussi à intervenir en cas de panne. Pour cela, une alarme est prévue; des études ont montré que sur une journée :
 - La probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à 0.002.
 - La probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à 0.003.
 - La probabilité qu'une panne se produise est égale à 0.04.
 On note :
 - A : l'événement : « **l'alarme se déclenche** ».
 - B : l'événement : « **Une panne se produit** ».

- Démontrer que la probabilité qu'une panne se produise et l'alarme se déclenche est égale à 0.039.
- Calculer la probabilité pour que l'alarme se déclenche.
- Calculer la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.

Exercice 13.7.16 ...

Une urne contient des boules indiscernables au toucher dont une boule numérotée n_0 , deux boules numérotées n_1 , deux boules numérotées n_2 et une boule numérotée n_3 . Les nombres n_0, n_1, n_2 et n_3 sont dans cet ordre quatre termes consécutifs d'une suite arithmétique de 1^{er} terme $n_0 = -2$ et on donne $n_3 = 4$.

On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne. On note a le numéro de la 1^{ère} boule tirée et b le numéro de la deuxième boule tirée c'est-à-dire : $a \in \{n_0, n_1, n_2, n_3\}$ et $b \in \{n_0, n_1, n_2, n_3\}$.

- A chaque résultat (a, b) . On associe l'équation $(E) : z^2 + az + b = 0$ où $z \in \mathbb{C}$.

(a) On désigne par A_1 l'événement : « (E) admet $1 - i$ pour racine »

- Déterminer n_1 et n_2
- Déterminer la valeur de a et celle de b pour que (E) admette $1 - i$ pour racine puis en déduire la probabilité de l'événement A_1 .
- Quelle est l'autre racine de l'équation (E) .

(b) On désigne par A_2 l'événement : « (E) admet des racines réels distinctes ou confondues ».

Calculer la probabilité de l'événement A_2 .

- A chaque résultat (a, b) , on associe l'application $f_{a,b}$ du plan complexe (P) dans lui-même, qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tel que $Z' = \frac{1}{2}(a + ib)Z + 2i$.

On considère les événements suivants :

- T : « $f_{a,b}$ est une translation ».
- H : « $f_{a,b}$ est une homothétie ».
- R : « $f_{a,b}$ est une rotation ».
- S : « $f_{a,b}$ est une similitude directe d'angle $-\frac{\pi}{4}$ ».

Calculer la probabilité de chacun des événements, T, H, R et S .

Exercice 13.7.17 ...

Un sac contient une boule numérotée u_0 , deux boules numérotées u_1 , deux boules numérotées u_2 et une boule numérotée u_3 . Toutes les boules sont indiscernables au toucher. Les nombres u_0, u_1, u_2 et u_3 sont dans cet ordre quatre termes consécutifs d'une suite arithmétique tels que $u_0 = -2$ et $u_3 = 4$.

- On tire successivement et avec remise trois boules du sac. On note a le numéro de la première boule tirée, b le numéro de la deuxième boule tirée et c le numéro de la troisième boule tirée.

(a) Déterminer u_1 et u_2 .

(b) Au résultat (a, b, c) obtenus, on associe l'équation différentielle $(E) :$

$$ay'' + by' + \frac{1}{2}cy = 0.$$

- Déterminer a, b et c pour que l'équation caractéristique associée à (E) soit : $r \in \mathbb{R}, (2r + 1)^2 = 0$.
- Avec quelles probabilité obtient-on ce résultat ?

- Dans cette partie, on tire successivement et sans remise deux boules du sac.

Au couple (a, b) résultat, on associe l'application $f_{a,b}$ du plan complexe $\mathcal{P}$ dans lui-même, qui au point M d'affixe Z , associe le point M' d'affixe $Z' = \frac{1}{2}(a + ib)Z + 2i$.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

- T : « $f_{a,b}$ est une translation ».
- H : « $f_{a,b}$ est une homothétie ».
- R : « $f_{a,b}$ est une rotation ».
- S : « $f_{a,b}$ est une similitude directe d'angle $-\frac{\pi}{4}$ ».

Exercice 13.7.18 ...

λ étant un nombre réel fixé, on considère l'application f_λ du plan complexe (P) dans lui-même qui, à tout point M d'affixe Z fait correspondre le point M' d'affixe $Z' = (\alpha + i\beta)Z + 2 - \lambda i, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

- Déterminer α et β pour que f_λ soit une similitude directe de rapport 2 et d'angle de mesure $\frac{3\pi}{2}$.
 - On donne à α et β les valeurs trouvées en a), déterminer l'ensemble décrit par le centre de f_λ lorsque λ varie dans $\mathbb{R}$.

- On dispose de deux dés cubiques parfaits A et B .

Le dé A a :

- Une face portant le numéro 0.
- Deux faces portant le numéro 1,
- Trois faces portant le numéro -1 .

Le dé B a :

- Trois faces portant le numéro 0,
- Trois faces portant le numéro 1.

On lance les deux dés et on observe le nombre apparu sur chaque dé (les résultats respectifs sont différents).

Après chaque lancer, on définit le nombre complexe $\alpha + i\beta$ où α est le résultat du dé A et β le résultat du dé B .

- Déterminer tous les nombres $\alpha + i\beta$ que l'on peut former.
 - Quelle est la probabilité d'obtention de chacun d'eux ?
 - Déterminer la probabilité de chacun des événements :
 - E : « $\alpha + i\beta$ a pour argument $k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ».
 - G : « f_λ est une similitude de rapport $\sqrt{2}$ ».
 - On lance trois fois de suite les deux dés et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de fois qu'on a obtenu une similitude directe f_λ de rapport $\sqrt{2}$.
Déterminer la loi de probabilité de X , son espérance mathématique et son écart-type.
3. On suppose dans cette question que $\alpha = \lambda = 0$ et $\beta = \frac{1}{2}$

On définit la suite de points $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$M_0 = O$ et pour tout entier naturel n , $M_{n+1} = f_0(M_n)$.

Pour tout entier naturel n , on désigne par $Z_n = X_n + iY_n$ (X_n et Y_n sont des réels) l'affixe de M_n .

On note w l'affixe du centre de f_0 .

- Déterminer w et vérifier que, pour tout entier naturel n , $Z_{n+1} - w = \frac{i}{2}(Z_n - w)$.
On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $U_n = |Z_n - w|$.
- Montrer que U_n est une suite géométrique et que pour tout entier naturel n , $U_n = \frac{4\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
- Déterminer la limite de la suite (U_n) .

- En déduire la limite de chacune des suites (X_n) et (Y_n) .

Exercice 13.7.19 ...

Une urne contient dix boules : l'une est numérotée 8, deux sont numérotées 6, trois sont numérotées 4 et quatre sont numérotées 2. On organise un jeu selon la règle suivante :

Une boule est tirée au hasard (on suppose assurée l'équiprobabilité des tirages). On appelle résultat de ce tirage le numéro porté par la boule tirée :

- Si le résultat est 8, on remet la boule dans l'urne et l'on procède, à nouveau, au tirage d'une boule. On note le plus petit de ces deux résultats (qui est égal à 8 si le résultat du second tirage est 8 à nouveau)
 - Si le résultat est 6 ou 4, on note ce résultat.
 - Si le résultat est 2, on remet la boule dans l'urne et l'on procède, à nouveau, au tirage d'une boule. On note la moyenne arithmétique de ces deux résultats.
- Soit X la variable qui, à chaque épreuve, associe le nombre noté.

- Déterminer la loi de probabilité de X .
- Calculer l'espérance mathématiques $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.
- Définir la fonction de répartition F de X , puis la représentée graphiquement dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- Déterminer la probabilité pour qu'un nombre noté dans le tirage soit strictement inférieur à $E(X)$.

CHAPITRE 14

STATISTIQUES

Sommaire

14.1 Introduction	142
14.2 Rappels	143
14.3 Séries statistiques doubles	143
14.3.1 Nuage de points	143
14.3.2 Point moyen d'un nuage de points	144
14.4 Ajustement affine	144
14.4.1 Ajustement affine par la méthode des moindres carrés	144
14.5 Corrélation linéaire	145
14.5.1 Coefficient de corrélation linéaire	145
14.6 Exercices d'entraînement	145

Objectifs pédagogiques

L'élève doit être capable de :

- ☞ Présenter une série statistique double par un tableau à double entrée.
- ☞ Reconstituer les deux séries statistiques marginales à partir d'un tableau à double entrée représentant une série statistique double.

Une série statistique étant donnée,

- ☞ Représenter le nuage de points associés.
- ☞ Décider si ce nuage est justifiable d'un ajustement linéaire.
- ☞ Effectuer éventuellement cet ajustement.

14.1 Introduction

Nous avons dans les classes antérieures étudié les séries statistiques à une seule variable. On de la même manière étudier les séries statistiques à plusieurs variables par exemple, les notes dans chaque matière de dix élèves de la terminale D (les dix élèves constituent la population étudiée et les matières sont les variables). Dans le cadre de notre cours, nous nous limiterons aux séries statistiques à deux variables.

14.2 Rappels

- ♣ **Fréquence** : On appelle fréquence notée f d'une classe ou d'une modalité, le rapport de son effectif par son effectif total. $f = \frac{n_i}{N}$ avec n_i l'effectif de la modalité ou de la classe et N l'effectif total.
 - ♣ **Moyenne d'une série statistique** : on appelle moyenne d'une série statistique, le nombre réel $\bar{x}$ tel que : $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n n_i x_i}{N}$.
- Si la série statistique est regroupée en classe, alors, sa moyenne est $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n n_i c_i}{N}$: où c_i est l'effectif de chaque classe.
- ♣ **Variance** : on appelle variance d'une série statistique, le nombre réel noté $V(x)$ tel que :

$$V(x) = \frac{\sum_{i=1}^n n_i x_i^2}{N} - (\bar{x})^2$$
 - ♣ On appelle **écart-type** la racine carrée de la variance $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$.
 - ♣ **Coefficient de variation** : On appelle coefficient de variation noté C_v , le nombre réel $C_v = \frac{\sigma(x)}{\bar{x}}$.

14.3 Séries statistiques doubles

DÉFINITION 14.3.1 ✿

On appelle *série statistique double*, toute série statistique à deux caractères x et y .
On la résume souvent dans un tableau comme dans l'exemple suivant.

Exemple 14.3.1 (TAILLES EN CM ET ÂGES DE DIX ÉLÈVES DE TERMINALE D_2) ... 

Élevés	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Taille(x)	165	160	162	158	177	170	176	164	165	175
Age(y)	20	18	26	23	21	27	24	19	20	18

14.3.1 Nuage de points

DÉFINITION 14.3.2 ✿

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on appelle *nuage de points* associés à une série statistique double, l'ensemble des points $M(x_i, y_i)$.

Exemple 14.3.2 ... 

Pour l'exemple (14.3.1), on a le nuage suivant : (à faire en classe)

14.3.2 Point moyen d'un nuage de points

DÉFINITION 14.3.3 ✿

On appelle point moyen d'un nuage de points le point G où $x_G = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n n_i x_i}{N}$
et $y_G = \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n n_i y_i}{N}$.

14.4 Ajustement affine

Introduction

Certains nuages de points associés à une série statistique double ont une configuration particulière (droite, parabole . . .). on trace dans ce cas une courbe qui épouse le mieux la forme du nuage. On parle d'ajustement graphique. Dans le cas d'une droite, on parle d'ajustement affine ou d'ajustement linéaire que l'on peut obtenir à partir de la méthode des moindres carrés que nous allons aborder dans la section suivante.

14.4.1 Ajustement affine par la méthode des moindres carrés

Covariance

DÉFINITION 14.4.1 ✿

Soit x et y deux caractères étudiés sur une population P . $\bar{x}, \bar{y}$ les moyennes respectives de x et de y , n_{ij} l'effectif du couple de modalité (x_i, y_j) .
on appelle **covariance** de la série statistique double (x, y) , le nombre réel noté $COV(x, y)$ ou σ_{xy} défini par :

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{1}{N} \sum_{n_{ij}} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\ &= \frac{\sum_{ij} n_{ij} x_i y_i}{N} - \bar{x} \times \bar{y}\end{aligned}$$

Droites de régression

- Droite de régression de y en x : C'est une droite (D) de régression de y en fonction de x . Elle est une droite d'ajustement du nuage passant par le point moyen du nuage. Elle est définie par : $(D) : y = ax + b$ où $a = \frac{COV(x, y)}{V(x)}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$.
- Droite de régression de x en y : C'est une droite (D) de régression de x en fonction de y . Elle est une droite d'ajustement du nuage passant par le point moyen du nuage. Elle

est définie par : $(D) : x = a'y + b'$ où $a' = \frac{COV(x, y)}{V(y)}$ et $b' = \bar{x} - a'\bar{y}$.

Remarque 14.4.I

la droite de régression de y en x (resp- la droite de régression de x en y) est unique et passe toujours par le point moyen G . C'est la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés.

14.5 Corrélation linéaire

DÉFINITION 14.5.1 ✱

Deux variables x et y sont dites en corrélation linéaire lorsque les courbes de régression de y en x et x en y sont des droites.

14.5.1 Coefficient de corrélation linéaire

DÉFINITION 14.5.2 ✱

On appelle coefficient de corrélation linéaire d'une série statistique double de caractères x et y , le nombre réel r défini par :

$$r = \frac{COV(x, y)}{\sqrt{V(x) \times V(y)}}$$

Propriété 14.5.1 ✱

- r est un réel qui a toujours le même signe que $COV(x, y)$.
- On démontre aisément que $a \times a' = r^2$.

Remarque 14.5.I

- Si $a > 0$ et $a' > 0$ alors $r = \sqrt{aa'}$.
- Si $a < 0$ et $a' < 0$ alors $r = -\sqrt{aa'}$.
- Si $r^2 = 1$ alors, on dit que l'ajustement linéaire est parfait. Dans ce cas, les droites de régression de x en y et de y en x sont confondues.
- Si $0,87 \leq |r| \leq 1$ alors, les droites de régression de x en y et de y en x sont proches l'une de l'autre. On dit alors qu'il y a une bonne corrélation ou une forte corrélation.

14.6 Exercices d'entraînement

Exercice 14.6.1 ...

Le tableau suivant donne les résultats à partir de 10 essais de laboratoire concernant la charge de rupture d'un acier en fonction de sa teneur en carbone.

Teneur x_i en carbone	70	60	68	64	66	64	62	70	74	62
Teneur de rupture y_i en kg	87	71	79	74	79	80	75	86	95	70

1. Représenter graphiquement le nuage de points de coordonnées (x_i, y_i) dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'origine le point de coordonnées **(60; 71)** du tableau et d'unité graphique le centimètre.
2. Calculer la moyenne, la variance et l'écart type des séries statistiques associées aux variables x et y .
3. Calculer les coordonnées du point moyen G .
4. Trouver une équation de la droite de régression de y en x et celle de la droite de régression de x en y .
5. Représenter ces deux droites le même graphique que celui utilisé pour le nuage de points.
6. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre
7. Estimer la teneur en carbone d'un acide dont la charge de rupture est 100.
8. Estimer la charge de rupture d'un acier dont la teneur en carbone est 50.

Exercice 14.6.2 ...

On considère la série statistique double (x, y) définie par le tableau suivant :

x	1	2	3	4	5
y	25	40	60	120	400

Les résultats seront présentés sous forme de nombres décimaux d'ordre 4.

1. (a) Construire le nuage de points associés à cette série statistique double.
 (b) Calculer le coefficient de corrélation de cette série.
 (c) Peut-on effectuer un bon ajustement affine de ce nuage à l'aide de la méthode des moindres carrés.
2. On pose $z = \ln(y)$.
 (a) Calculer le coefficient de corrélation de (x, z) .
 (b) Écrire l'équation de la droite de régression de z en fonction de x .
 (c) En déduire l'expression de y en fonction de x .
3. Estimer y pour $x = 7$.